

# 数値積分に対する超関数法

緒方 秀教\* 平山 弘†

\* 電気通信大学 † 神奈川工科大学

**概要.** 本論文では、平山が提案した有限区間積分に対する数値積分法—本論文では「超関数法」と呼ぶ—について解析を行う。超関数法では、問題とする積分を閉積分路上の複素積分に変換して、周期関数に対して性能の良い台形公式で近似計算する。数値実験により、超関数法は積分区間端点の特異性が強い積分に対して有効であることがわかる。また、超関数法と佐藤超関数論との関係についても触れる。

## Hyperfunction Method for Numerical Integrations

Hidenori Ogata\* Hiroshi Hirayama†

\*The University of Electro-Communications

†Kanagawa Institute of Technology

*Abstract.* We examine Hirayama's numerical integration method for integrals over finite intervals, which is called the "hyperfunction method" in this paper. In the hyperfunction method, an integral is transformed into a complex integral on a closed contour and is approximated by the trapezoidal rule, which gives good results for integrals in the case that the integrands are periodic functions. Numerical examples show that the hyperfunction method is effective for integrals with strong end-point singularities. We also remark that the relation between the hyperfunction method and the hyperfunction theory.

### 1. はじめに

数値積分の台形公式は周期関数の積分に対して精度が良いことが知られている。この事実に着目して平山は、問題とする積分を閉積分路上の複素積分に変換して台形公式により近似計算するという数値積分法を提案した [3]。

次の形の積分を考える。

$$(1.1) \quad I = \int_a^b f(x)w(x)dx,$$

ここで  $f(x)$  は与えられた関数であり、 $w(x)$  は重み関数、すなわち、有限個のゼロ点を除いて区間  $(a, b)$  で正となり、 $(a, b)$  上で可積分である関数である。平山の方法では、次のようにして積分 (1.1) を近似する。関数  $f(x)$  は、閉区間  $[a, b]$  を含む複素領域  $D$  で解析的であると仮定する。このとき、 $f(x)$  は Cauchy の積分公式により、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-x} dz$$

と表される．ここで， $C$  は領域  $D$  に含まれ閉区間  $[a, b]$  のまわりを正の向きに一周する閉積分路とする (Fig.1 参照)．したがって，

$$(1.2) \quad I = \int_a^b \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-x} dz \right\} w(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \Psi(z) dz$$

となる．ここで，

$$(1.3) \quad \Psi(z) = \int_a^b \frac{w(x)}{z-x} dx.$$

である．いくつかの典型的な場合について，関数  $\Psi(z)$  は次のように与えられる．

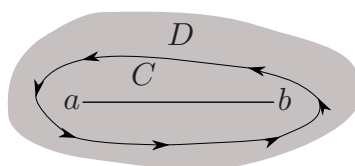


Fig. 1. The domain  $D$  with the integral path  $C$  inside itself.

$(a, b) = (-1, 1)$ ,  $w(x) = 1$  の場合には，

$$\Psi(z) = \log \left( \frac{z+1}{z-1} \right),$$

となり， $(a, b) = (0, 1)$ ,  $w(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$  ( $\alpha, \beta > 0$ ) の場合には

$$\Psi(z) = B(\alpha, \beta) \frac{1}{z} F \left( \alpha, 1; \alpha + \beta; \frac{1}{z} \right).$$

となる． $C$  を周期  $u_p (> 0)$  の周期関数  $\varphi(u)$  により

$$z = \varphi(u), \quad 0 \leq u < u_p,$$

とパラメータ表示すると，

$$(1.4) \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{u_p} f(\varphi(u)) \Psi(\varphi(u)) \varphi'(u) du,$$

となる．これを台形公式で近似することにより，次の数値積分公式を得る．

$$(1.5) \quad I \simeq I_N \equiv \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=0}^{N-1} f(\varphi(kh)) \Psi(\varphi(kh)) \varphi'(kh) \quad \left( h = \frac{u_p}{N} \right),$$

ここで， $N$  は標本点数である．変換された積分 (1.4) は周期関数の積分であり，これが台形公式で近似される．台形公式は周期関数の積分に対しては良い精度を与えるので，数値積分公式 (1.5) は精度が良いと期待される．

本論文で扱う数値積分法は、デルタ関数などを数学的に扱う佐藤超関数論と密接な関係がある。大雑把に言えば、(佐藤)超関数  $f(x)$  とは複素解析関数  $F(z)$  の境界値の差

$$f(x) = F(x + i0) - F(x - i0).$$

で表される関数である。解析関数  $F(z)$  は超関数  $f(x)$  の定義関数と呼ばれる。佐藤超関数論の詳細については、[2, 4]などを参照すること。本論文の場合、 $f(x)w(x)\chi_{(a,b)}(x)$ 、ただし、

$$(1.6) \quad \chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$$

として、これを超関数と見なしたとき、 $(-1/2\pi i)f(z)\Psi(z)$  がその定義関数となる。そして、(1.2)最右辺が、超関数としての  $f(x)w(x)\chi_{(a,b)}(x)$  の積分の定義である。したがって、本論文で扱う方法は積分  $I$  を超関数の積分とみなして、それを近似していることになる。その意味から、数値積分公式 (1.5) を本論文では超関数法と呼ぶことにする。

本論文の内容は次のとおりである。第2節では、超関数法 (1.5) に対する理論誤差評価を与える。この誤差評価は、周期関数の積分に対する台形公式の誤差評価に基いている。第3節では、数値実験例により超関数法の有効性を示す。この数値実験例から、超関数法はDE公式でも計算出来ないような強い端点の特異性があるような積分に対しても有効であることがわかる。第4節では、佐藤超関数論の概略を示し、超関数法と佐藤超関数論との関連性について述べる。第5節では、本論文の総括を行い今後の課題について述べる。

## 2. 理論誤差評価

はじめに次の補題を用意する。この補題は、周期解析関数の積分に対し台形公式を適用した場合、積分の近似値が真値に指数関数的収束することを示す。

**補題 2.1** ([1], p.315) 関数  $g(w)$  は帯状領域  $|\operatorname{Im} w| < d_0$  ( $d_0 > 0$ ) で解析的であり、周期  $u_p (> 0)$  の周期関数であるとする。このとき、台形公式

$$J = \int_0^{u_p} g(u)du \simeq J_N \equiv h \sum_{k=0}^{N-1} g(kh) \quad \left( h = \frac{u_p}{N} \right)$$

の誤差は、次の不等式により上から押さえられる。

$$|J - J_N| \leq 2u_p \max_{\operatorname{Im} w = \pm d} |g(w)| \frac{\exp(-(2\pi d/u_p)N)}{1 - \exp(-(2\pi d/u_p)N)},$$

ここで、 $d$  は  $0 < d < d_0$  なる任意の数である。

この定理を超関数法 (1.5) に適用することにより、次の定理を得る。この定理により、超関数法による積分の近似値は真値に指数関数的に収束することがわかる。

**定理 2.2** 積分路  $C$  のパラメータ表示を与える関数  $\varphi(w)$  は帯状領域  $|\operatorname{Im} w| < d_0$  ( $d_0 > 0$ ) で解析的,  $|\operatorname{Im} w| \leq d_0$  で連続であり, 周期  $u_p (> 0)$  の周期関数であるとする.  $C_\delta$  ( $-d_0 \leq \delta \leq d_0$ ) を  $z = \varphi(u + i\delta)$ ,  $0 \leq u < u_p$  で与えられる閉曲線とし,  $D_\delta$  を  $C_\delta$  で囲まれた領域とする. ただし,  $-d_0 \leq \delta_1 < \delta_2 \leq d_0$  であるとき,  $D_{\delta_2} \subsetneq D_{\delta_1}$  であるとする (Fig.2 参照).

関数  $f(z)$  は  $D_{-d_0}$  で解析的,  $\overline{D_{-d_0}}$  で連続であるとし, 関数  $\Psi(z)$  は  $\mathbb{C} \setminus [a, b]$  で解析的であるとする \*1. このとき, 超関数法 (1.5) の誤差は次の不等式で上から押さえられる.

$$|I - I_N| \leq 2u_p \max_{\operatorname{Im} w = \pm d_0} |f(\varphi(w))\Psi(\varphi(w))\varphi'(w)| \frac{\exp(-(2\pi d_0/u_p)N)}{1 - \exp(-(2\pi d_0/u_p)N)}.$$

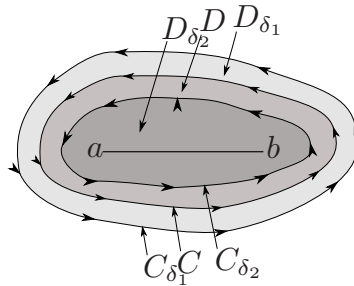


Fig. 2. The closed curves  $C_{\delta_1}$ ,  $C$ ,  $C_{\delta_2}$  and the domains  $D_{\delta_1}$ ,  $D$ ,  $D_{\delta_2}$ , where  $-d_0 \leq \delta_1 < 0 < \delta_2 \leq d_0$ .

### 3. 数値実験例

この節では, 数値実験例により超関数法の有効性を示す. 数値計算はすべて, C++ でプログラミングして倍精度演算で行った.

積分

$$(3.1) \quad I = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}e^x dx = B(\alpha, \beta)F(\alpha; \alpha + \beta; 1) \\ = 3.71819\ 70362\ 84701 \dots \times 10^4 \quad (\alpha = \beta = 10^{-4})$$

に対し, 超関数法と DE 公式 [6] により近似値を計算した. ただし, 超関数法において積分路  $C$  は楕円

$$(3.2) \quad z = \varphi(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos u + \frac{i}{4} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin u, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad \rho = 10,$$

\*1  $\mathbb{C}$  は複素平面, すなわち, 複素数全体の集合である.

にとった. 両方法について相対誤差

$$\epsilon_N = \frac{|I - I_N|}{|I|}$$

を計算し, 標本点数  $N$  を大きくしていく時の変化を調べた. 結果を Fig.3 (a) に示す. 図において, 横軸は標本点数  $N$ , 縦軸は相対誤差の常用対数  $\log_{10} \epsilon_N$  である. この図から, 超関数法の誤差は  $N$  を大きくしていくと  $\epsilon_N = O(0.13^N)$  のオーダーで減衰するが, DE 公式ではこの積分の近似値が計算できていないことがわかる. その理由は次のように考えられる. DE 公式では, 特異性をもつ端点  $x = 0, 1$  に集積するように標本点をとっているが, この例では特異性があまりにも強いので関数値が十分な精度で計算できない. 一方, 超関数法では, 特異点から離れた複素平面内の曲線上に標本点を取り, そこでは関数値が穏やかに変化しているため, 積分の近似値を十分な精度で計算できるのである.

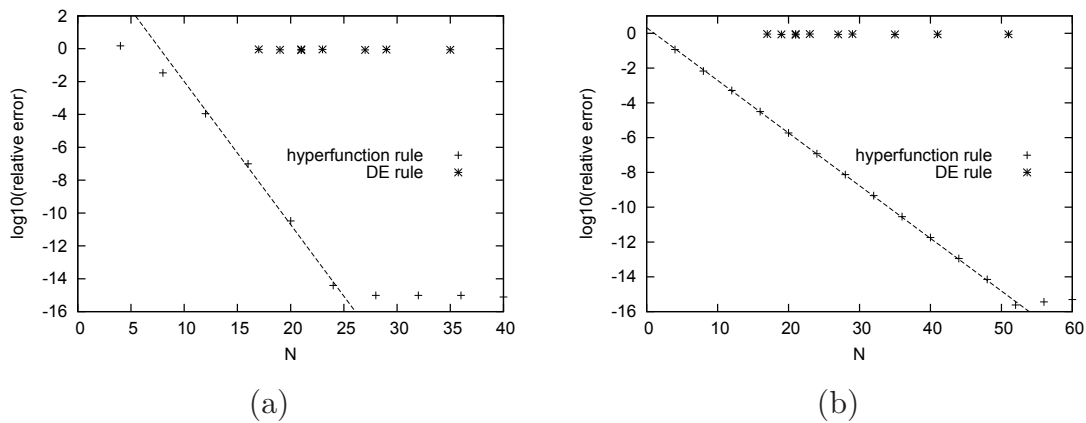


Fig. 3. Error of the hyperfunction method and the DE rule for (a) the integral (3.1) and (b) the integral (3.3).

さらに, 次の積分の近似値を超関数法および DE 公式で計算した.

$$(3.3) \quad I = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} B(\alpha, \beta) \{F(\alpha, 1; \alpha + \beta; i) + F(\alpha, 1; \alpha + \beta; -i)\} \\ = 1.50002\ 19120\ 58143 \dots \times 10^4, \quad (\alpha = \beta = 10^{-4})$$

超関数法において, 積分路  $C$  は楕円 (3.2), ただし,  $\rho = 2$  とした. 両方法の相対誤差の標本点数  $N$  に対する変化を調べ, Fig.3 (b) に示した. この図から, 超関数法の誤差は  $\epsilon_N = O(0.41^N)$  のオーダーで指数関数的減衰するが, DE 公式ではこの積分に対しては近似値が計算できていないことがわかる.

上の数値実験で見たとおり, 端点特異性が非常に強い場合は DE 公式でも積分計算ができないのであるが, その理由を詳細に調べると次のことが分かる. DE 公式では,

$$I = \int_0^1 f(x) x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0$$

の形の積分は,

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad I &= \frac{1}{2^{\alpha+\beta-1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\psi_{\text{DE}}(u)\right) \tilde{\psi}_{\text{DE}}(u) du \\
 &\simeq \frac{h}{2^{\alpha+\beta-1}} \sum_{k=-N_1}^{N_2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\psi_{\text{DE}}(kh)\right) \tilde{\psi}_{\text{DE}}(kh), \\
 \psi_{\text{DE}}(u) &= \tanh(c \sinh u), \quad \tilde{\psi}_{\text{DE}}(u) = \frac{c \cosh u \exp(c(\alpha - \beta) \sinh u)}{\cosh^{\alpha+\beta}(c \sinh u)}
 \end{aligned}$$

( $N_1, N_2$  は正の整数,  $h, c$  は正の定数. 本論文では  $c = \pi/2$  ととった) と計算されるが, (3.4) の被積分関数を例えば積分 (3.1), すなわち,  $f(x) = e^x$  について倍精度で計算すると, Fig. 4 (a) のようになる. 図からわかるように, 被積分関数は  $|u| \geq 6$  あたりでは 0 と計算されている. これは被積分関数の分母がオーバーフローを起こしてしまっているからである. 一方, 分母のオーバーフローが起こらないように, 被積分関数を多倍長演算で計算したグラフは Fig. 4 (b) のようになる. 図からわかるように, 被積分関数のグラフは実は  $u = \pm 8$  あたりに大きいピークを持ち, この部分が積分に一番大きく寄与していると考えられる. ところが, 倍精度計算では上に述べた理由によりこの部分の被積分関数計算が行われず, 積分計算に反映されないのである. これが, DE 公式では倍精度計算で本論文の数値積分例が計算できない理由であると考えられる.

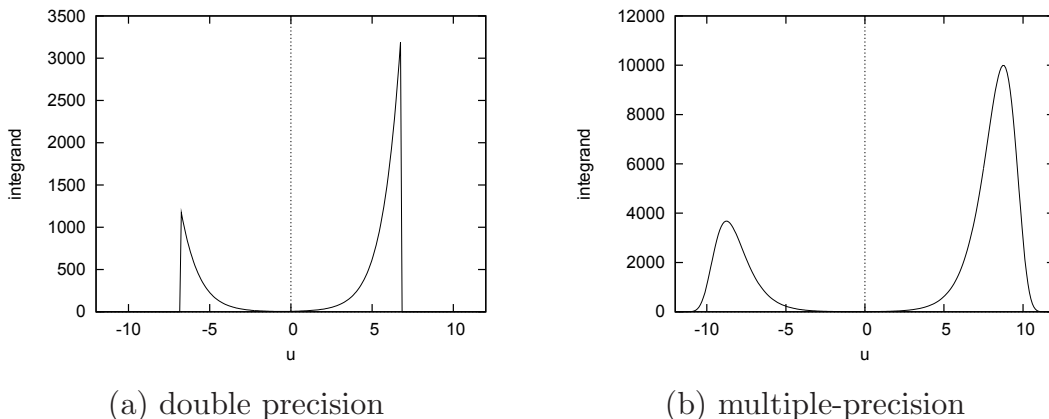


Fig. 4. The graphs of the integrand of the numerical integration of (3.1) by the DE formula computed in (a) double precision and (b) multiple-precision.

## 理論誤差評価との比較

2 番目の数値例 (3.3) に対する超関数法による近似積分について, 数値実験により得られた誤差評価  $\epsilon_N = O(0.41^N)$  を定理 2.2 により得られる理論誤差評価と比較する. この

例の場合、複素積分路をパラメータ表示する関数  $z = \varphi(w)$  は、等角写像

$$J : \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \geq 1 \} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \zeta \mapsto z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

$$\Gamma : \{ w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w \leq \log \rho \} \rightarrow \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \geq 1 \}, \quad w \mapsto \zeta = \rho e^{iw}$$

を用いて、

$$z = J(\zeta), \quad \zeta = \Gamma(w)$$

と分解される．そして、定理 2.2 において  $f(z)$  が正則であるべき  $z$ -平面内の領域  $D_{-d_0}$  は楕円内部

$$D_{-d_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{(\text{Re } z - 1/2)^2}{A_{d_0}^2} + \frac{(\text{Im } z)^2}{B_{d_0}^2} < 1 \right\},$$

$$A_{d_0} = \frac{1}{4} \left( \rho e^{d_0} + \frac{e^{-d_0}}{\rho} \right), \quad B_{d_0} = \frac{1}{4} \left( \rho e^{d_0} - \frac{e^{-d_0}}{\rho} \right)$$

であり、これは等角写像  $\zeta = J^{-1}(z)$ ,  $w = \varphi^{-1}(z) = \Gamma^{-1} \circ J^{-1}(z)$  によって  $\zeta$ -平面内の円環領域

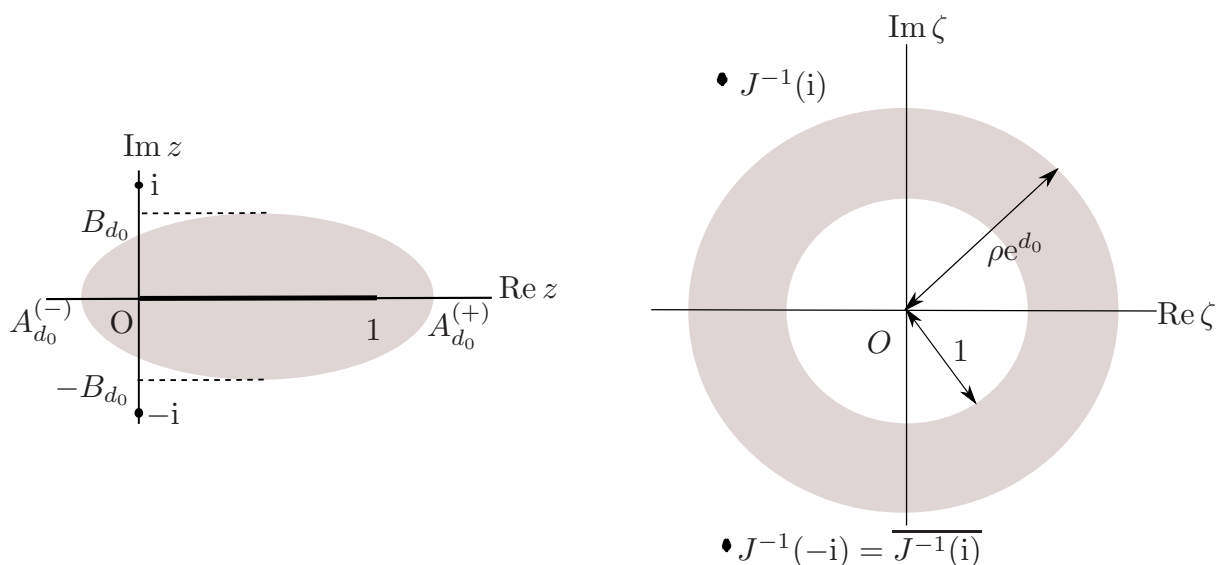
$$\mathcal{A}_{-d_0} = \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |\zeta| < \rho e^{d_0} \},$$

および、 $w$ -平面内の帯状領域

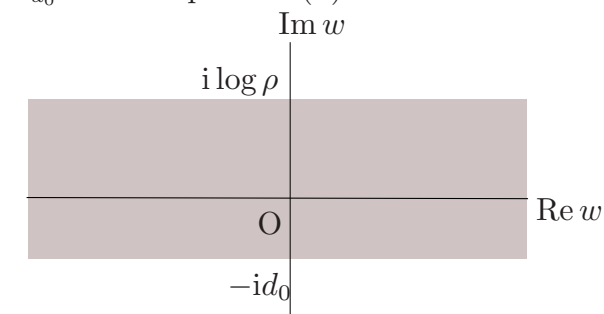
$$\mathcal{S}_{-d_0} = \{ w \in \mathbb{C} \mid -d_0 < \text{Im } w \leq \log \rho \}$$

に写される (Fig.5 参照)．したがって、 $f(z)$  が楕円領域  $D_{-d_0}$  で正則であるという条件は、 $f \circ J(\zeta)$  が円環領域  $\mathcal{A}_{-d_0}$  で正則であるという条件と同値である．さて、関数  $f(z) = 1/(1+z^2)$  は  $z = \pm i$  に 1 位の極を持つので、関数  $f \circ J(\zeta)$  は  $\zeta = J^{-1}(i) = -1.91018\dots + 4.19737\dots \times i$  および  $\zeta = J^{-1}(-i) = \overline{J^{-1}(i)}$  に 1 位の極を持つ．この極は円環領域  $\mathcal{A}_{-d}$  の外部になければならないから、 $\rho e^{d_0} = 2e^{d_0} < |J^{-1}(i)|$ , よって、 $e^{d_0} < |J^{-1}(i)|/2 = 2.30579\dots$  でなければならない． $d_0$  を上の議論で得られる上限ぎりぎりの値、すなわち、 $e^{d_0} \simeq |J^{-1}(i)|/2$  なる値ととってみると、複素積分路のパラメータ表示関数  $\varphi(u)$  の周期は  $u_p = 2\pi$  であるから、定理 2.2 より得られる理論誤差評価は  $\epsilon_N = O(e^{-d_0 N}) \simeq O(0.43369^N)$  となる．これは、数値実験より得られた誤差評価  $\epsilon_N = O(0.41^N)$  とよく符合する．

一方、1 番目の数値例 (3.1) については、 $f(z) = e^z$  は整関数であるので  $d_0$  の値はどれだけであるかは自明でない．そして、Fig. 3 (a) のグラフをよく見ると、誤差は定理 2.2 より得られるオーダー  $\epsilon_N = O(q^N)$  ( $q$  ( $0 < q < 1$ ) は定数) よりも速い  $\epsilon_N = O(q^{Na})$  ( $q$  ( $0 < q < 1$ ,  $a > 1$ ) は定数) のオーダーで減衰しているように見える．このことから、数値例 3.1 に対する理論誤差評価は定理 2.2 とは別の方法で、例えば積分誤差を複素積分で表示してその複素積分の値を鞍点法で見積もるといった方法で行わねばならないと考えられる．



(a) the ellipse domain  $D_{-d_0}$  in the  $z$ -plane (b) the annular domain  $\mathcal{A}_{-d_0}$  in the  $\zeta$ -plane



(c) the strip domain  $\mathcal{S}_{-d_0}$  in the  $w$ -plane

Fig. 5. The domain  $D_{-d_0}$  in the  $z$ -plane, where  $A_{d_0}^{(\pm)} = 1/2 \pm A_{d_0}$ , the corresponding domain  $\mathcal{A}_{-d_0}$  in the  $\zeta$ -plane and the corresponding domain  $\mathcal{S}_{-d_0}$  in the  $w$ -plane.

#### 4. 佐藤超函数論との関連

この節では、超函数法と佐藤超函数論との関連について述べる。

はじめに佐藤超函数論の概略を述べる。  $K$  を実軸上の開区間、  $D(K)$  を複素平面  $\mathbb{C}$  内の領域で  $K$  を閉部分集合として含むようなものとする。一般に、領域  $D$  における解析関数全てからなる集合を  $\mathcal{O}(D)$  と記すことにする。そして、  $\mathcal{O}(D(K) \setminus K)$  のふたつの関数  $F(z)$ ,  $G(z)$  に対し、ある解析関数  $\phi(z) \in \mathcal{O}(D(K))$  が存在して

$$F(z) - G(z) = \phi(z).$$

が成り立つとき、  $F(z) \sim G(z)$  と記す。簡単にわかるように、“ $\sim$ ” は  $\mathcal{O}(D(K) \setminus K)$  における同値関係である。そして、  $\mathcal{O}(D(K) \setminus K)$  の関数の同値類を、区間  $K$  における (佐



藤) 超関数 (hyperfunction) と呼び,  $f(x), g(x), \dots$  などの記号で表す. 超関数  $f(x)$  が  $F(z) \in \mathcal{O}(D(K) \setminus K)$  を含む同値類であるとき,  $F(z)$  を超関数  $f(x)$  の定義関数であると言ひ,  $f(x) = [F(z)]$  と記す. 点  $x \in K$  において極限

$$(4.1) \quad F(x + i0) - F(x - i0) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \{F(x + i\epsilon) - F(x - i\epsilon)\}$$

が存在するとき, この極限值を超関数  $f(x)$  の点  $x$  における値と定め, 極限 (4.1) が存在しない時は, 超関数  $f(x)$  の点  $x$  における値は定めないこととする. 超関数  $f(x)$  の区間  $K$  上における積分を

$$\int_K f(x)dx = - \oint_C F(z)dz$$

で定義する. ただし,  $C$  は区間  $K$  の端点を通り, それ以外の点では  $D(K) \setminus K$  内を区間  $K$  を囲むように通る閉曲線とする. 例えば, Dirac のデルタ関数  $\delta(x)$  は

$$\delta(x) = \left[ -\frac{1}{2\pi iz} \right]$$

で与えられる. すなわち,  $-1/(2\pi iz)$  は  $\delta(x)$  の定義関数である. そして,  $-\infty < a < 0 < b < +\infty$ ,  $\phi(x)$  を  $[a, b]$  上の実解析関数であるとするとき,  $\phi(x)\delta(x)$  の区間  $(a, b)$  上の積分は

$$\int_a^b \phi(x)\delta(x)dx = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\phi(z)}{z} dz = \phi(0)$$

で与えられる. ここで,  $C$  は端点  $a, b$  を通り, それ以外の点では区間  $(a, b)$  を囲むように上半平面  $\text{Im } z > 0$  または下半平面  $\text{Im } z < 0$  を通る閉曲線である. これは, 従来のデルタ関数の定義に合致する.

超関数法の場合, 被積分関数を超関数とみなすと

$$f(x)w(x)\chi_{(a,b)}(x) = \left[ -\frac{1}{2\pi i} f(z)\Psi(z) \right],$$

となる. ここで,  $\chi_{(a,b)}(x)$  は (1.6) で与えられる.  $-(1/2\pi i)f(z)\Psi(z)$  が  $f(x)w(x)\chi_{(a,b)}(x)$  の定義関数であることから, 積分  $I$  を超関数積分とみなすと

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\Psi(z)dz,$$

となる. ここで,  $C$  は領域  $D$  に含まれ区間  $(a, b)$  を囲むような閉曲線である. よって, 積分  $I$  の複素積分への変換 (1.4) が再び得られた. したがって, 超関数法は超関数積分を定義する複素積分を直接近似計算しているとみなすことができる.

## 5. まとめと今後の課題

本論文では数値積分に対する超函数法について調べた。これは、積分を複素周回積分に変換して台形公式で近似する方法である。理論誤差評価により、この方法は指数関数的収束することを示した。そして、数値実験により、DE 公式でも計算出来ないような端点特異性の強いような積分に対しても、この方法は高い精度で近似値を与えることを示した。さらには、佐藤超函数論との関連についても触れ、この方法は超函数を定義する複素積分を直接近似計算していることを指摘した。

数値積分と佐藤超函数論との関連に関する研究として、森による研究 [5] がある。この中では、超函数  $w(x)\chi_{(a,b)}(x)$  の定義関数  $(-1/2\pi i)\Psi(z)$  を近似することにより、Gauss-Legendre 公式のようなよく知られた数値積分公式が得られることを示している。一方で、超函数法は超函数積分を定義する複素積分を直接近似計算しており、その点が森の研究との違いである。

今後の課題として次の問題が挙げられる。

- 超函数法は本質的に複素数演算が必要となり、その計算の手間を軽減するための工夫が必要である。
- 超函数法の計算には重み関数  $w(x)$  から (1.3) により定まる複素関数  $\Psi(z)$  が必要であるが、任意の  $w(x)$  に対して  $\Psi(z)$  が常に陽に与えられるとは限らない。そのような場合、 $\Psi(z)$  をどのようにして計算するかが課題になる。
- 超函数法に現れる複素積分路  $C$  をどうやって選べばよいか？
- 佐藤超函数論では Cauchy の主値や Hadamard の有限部分といった特異積分も、通常の積分と一括に扱うことができる。よって、超函数法はこうした特異積分の計算にも拡張できると期待される。

**謝辞** 本論文を詳細にわたり検討し、多くの有益な指摘・助言をされた査読者に厚く感謝する。本研究は JSPS 科研費 25400196 の助成を受けている。

## 参考文献

- [1] P. J. Davis and P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, 2nd ed., Academic Press, San Diego, 1984.
- [2] U. Graf, *Introduction to Hyperfunctions and Their Integral Transforms — An Applied and Computational Approach—*, Birkhäuser, Basel, 2010.
- [3] 平山弘, 周回積分変換法による数値積分法, 第 44 回数値解析シンポジウム講演予稿集, (2015), 21–24.

- [4] 今井功, 応用超関数論 I, II, サイエンス社, 1981 年.
- [5] 森正武, 数値解析と超関数論, 京都大学数理解析研究所講究録, **145** (1972), 1–11.
- [6] H. Takahasi and M. Mori, Double exponential formulas for numerical integration, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **9** (1974), 721–741.

緒方 秀教 (正会員) 〒182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1

東京大学大学院修了, 博士 (工学), 現在, 電気通信大学大学院情報理工学研究科教授.  
日本数学会, 情報処理学会, 日本計算工学会会員.

平山 弘 (正会員) 〒243-0292 神奈川県厚木市下荻野 1030

東京大学大学院修了, 理学博士, 現在, 神奈川工科大学創造工学部教授. 情報処理学会, 日本物理学会, 日本流体力学会, 日本機械学会会員.