日本応用数理学会論文誌
Vol. 26, No. 2, 2016, pp. 167～181

議員定数配分方式の偏りについて

一森 哲男 *
* 大阪工業大学情報科学部情報システム学科

概要． アメリカ合衆国では議員の配分方式の合憲性に関し，一度だけ，連邦最高裁で審議された．以前より Balinski らは，Hill 方式が小州に有利であり，Webster 方式には大州・小州間に偏りがないと主張していたが，この裁判では結局その主張が認められず，Hill 方式が合憲という判決で決着した．本稿では，このときの国勢調査局の Ernst の主張を検討し，彼の主張の一部が妥当性に欠けることを明らかにする．

On the Bias of Apportionment Methods

Tetsuo Ichimori*
*Department of Information Systems, Osaka Institute of Technology

Abstract. For the first time in the history of apportionment, the United States Supreme Court deliberated upon the constitutionality of the Huntington-Hill method, currently being used. Since around 1980, Balinski and Young have pointed out that Huntington-Hill's method favors small states while Webster's method has no bias in favor of small or large states. However the Court upheld the constitutionality of the Huntington-Hill method. Considering an assertion made by Ernst who was then an official at the U.S. Census Bureau and supported Huntington-Hill's method in the court, it is shown that his assertion partly lacks validity.

1. はじめに

人口や得票に比例して議員を配分する問題を議員定数配分問題という．これはどこの国にも存在する普遍的な問題である．実際，わが国では「1 票の格差」としてよく知られている．議員定数配分問題をもっとも熱心に，かつ，もっとも長く議論してきた国はアメリカ合衆国である．そこで，本論文では，アメリカの下院議員の配分をモデルとして，問題を記述する．すなわち，10 年ごとの国勢調査により人口が定まり，その人口に比例して州間で議員を配分するモデルを考える．

アメリカでは第 1 回の国勢調査が 1790 年に行われ，議員が配分されたが，そのとき以来，配分方式の偏りは絶えず議論の対象となってきた．最初に使われた Jefferson 方式は，わが国では D'Hondt 方式と呼ばれるが，この方式は多くの場合，人口の多い州（以下，大州）に明確な有利さを与え，人口の少ない州（以下，小州）に極端な不利益を与えた．つまり，Jefferson 方式は人口比例から大きく乖離した配分方式となっている．しかしながら，現在，アメリカで使われている Hill 方式やそれ以前に使われていた Webster 方式で

は，大州に有利さを与えているのか，逆に，小州に有利さを与えているのかの判断は極めて難しい．

20 世紀の前半，議員を配分する方式として，Webster 方式を用いるべきか，それとも，Hill 方式を用いるべきかという大論争が巻き起こった．Willcox [14] は Webster 方式を支持し，Huntington [3] は Hill 方式を支持した．両者の対立はアメリカ議会を巻き込み，ついに，下院議長は全米科学アカデミーにその両者の優劣の判定を正式に要請した．1929 年と 1948 年に判定が行われ，2 回とも Hill 方式に軍杯があがった．このとき，配分方式の偏りは大きな要素であり，Hill 方式には偏りがなく，Webster 方式は大州に有利と判定された．結果，議員定数配分問題は解決したと考えられるようになった．

しかしながら，Balinski と Young [1] は 1980 年ごろから，Hill 方式は小州に有利で，Webster 方式には完全に偏りがないと主張し始めた．1992 年には連邦最高裁で Hill 方式の違憲性について審理が行われた．裁判で国勢調査局の Ernst [2] は Balinski と Young の主張に反論し，Webster 方式は大州に有利であると主張した．判決[*1] では，Hill 方式の合憲性が認められた．この後，Hill 方式の違憲性に関する裁判は行われておらず，配分方式の偏りの研究も活発ではない．実のところ，この裁判の 9 年後に，Balinski と Young は彼らの著書の第 2 版 [1] を出版しているが，そのなかで，この裁判が行われたことは記述しているものの，裁判の内容に関してはまったく何も述べていない．Ernst に対する反論もなければ，配分方式の偏りについても，新規のものは何もない．だから，いま Ernst の主張を再考することには十分意義があると思われる．

2. 除数方式

本論文では Hill 方式と Webster 方式を研究対象とするが，よりよく理解するために，両方式を含む緩和除数方式 [5,10] とよばれる配分方式のクラス全体を扱う．説明のため除数方式について簡単に説明する．最初に記号を定める．正の整数の集合を $\mathbb{Z}_+$，非負の整数の集合を $\mathbb{Z}_0$ とする．州の数を $s \geq 2$，議員定数を h，州 i の人口を $p_i \geq 1$，州 i に配分される議員の人数を $a_i \in \mathbb{Z}_0$ とする．丸め関数 $d(k)$ は $\mathbb{Z}_0$ を定義域に持ち，$k \in \mathbb{Z}_0$ に関して狭義増加で，不等式 $k \leq d(k) \leq k+1$ を満たす．正の実数 $x > 0$ に対して，丸め記号 $[x]_d$ はつぎのように定義される：$d(k-1) < x < d(k)$ ならば $[x]_d = k$（$k \in \mathbb{Z}_0$），$x = d(k)$ ならば $[x]_d$ は k または $k+1$（$k \in \mathbb{Z}_0$）に等しい．ただし，$d(-1) = 0$ と約束する．議員定数 h に関して，$d(0) = 0$ となる配分方式では $h \geq s$ と仮定し，$d(0) > 0$ となる配分方式では $h \geq 0$ と仮定するのが一般的である．丸め関数 $d(k)$ に基づく除数方式とは，等式

$$\sum_{i=1}^{s} [p_i/\lambda]_d = h \tag{2.1}$$

*1 アメリカ合衆国判例集：United States Department of Commerce v. Montana, 503 U.S. 442(1992)

を満たす $\lambda = \lambda_d < +\infty$ に対して[*1]，州 i に $a_i = [p_i/\lambda_d]_d$ 人の議員を与える配分方式である．だから，$d(0) = 0$ となる配分方式では，各州に 1 人の議員は配分される．

丸め関数を具体的に定めると，除数方式は特定の名前で呼ばれることが多い．例えば，$d(k) = k$ だと Adams 方式，$d(k) = k + 1$ だと Jefferson 方式と呼ばれる．2 整数 k と $k + 1$ の平均はすべて丸め関数となりうる．例えば，算術平均 $d(k) = k + 1/2$ だと Webster 方式，幾何平均 $d(k) = \sqrt{k(k+1)}$ だと Hill 方式，調和平均 $d(k) = k(k + 1)/(k + 1/2)$ だと Dean 方式と呼ばれる．少し珍しいものとして，対数平均 $d(k) = 1/\log((k + 1)/k)$ だと TS 方式 [4,13]，identric 平均 $d(k) = (1/e)((k + 1)^{(k+1)}/k^k)$ だと Theil 方式 [4,12] と呼ばれる[*2]．

ここで，2 つの実数パラメータ θ, ω を持つ Stolarsky 平均 $u(x, y; \theta, \omega)$ を定義する [11]．これは異なる 2 つの実数 $x > 0, y > 0$ の平均で，$\theta\omega(\theta - \omega) \neq 0$ のとき，

$$u(x, y; \theta, \omega) = \left(\frac{\omega(x^\theta - y^\theta)}{\theta(x^\omega - y^\omega)}\right)^{\frac{1}{\theta-\omega}} \tag{2.2}$$

と定義される．この条件以外の θ, ω に対しての $u(x, y; \theta, \omega)$ は，極限操作により得られる．詳しくは [11] に書かれている．また，$x = y$ あるいは $x = 0$ または $y = 0$ の場合にも拡張は可能である．この平均に対し，$u(x, y; \theta, \omega) = u(y, x; \theta, \omega) = u(x, y; \omega, \theta)$ が成り立つ．また，θ と ω に関して，それぞれ，狭義増加となる．

この平均 $u(x, y; \theta, \omega)$ の特別な場合，すなわち，

$$u(x, \theta) = u(x, x + 1; \theta, 1) = \left(\frac{(x + 1)^\theta - x^\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}} \tag{2.3}$$

を定義し，丸め関数として $d(k) = u(k, \theta)$（$k \in \mathbb{Z}_0$）とする除数方式を（パラメータ θ の）緩和除数方式と呼ぶ．ここで，$u(0, \theta) = \lim_{x \to +0} u(x, \theta)$，すなわち，$\theta \leq 0$ のとき，$u(0, \theta) = 0$，$u(0, 1) = 1/e$，それ以外のとき $u(0, \theta) = (1/\theta)^{1/(\theta-1)}$ である（文献 [7] の補題 2.1）．

Stolarsky 平均の性質より，各 $k \in \mathbb{Z}_0$ を固定したとき，関数 $u(k, \theta)$ は θ に関して狭義増加[*3] で，$\theta \to -\infty$ のとき $u(k, \theta) \to k$（Adams 方式），$\theta \to +\infty$ のとき $u(k, \theta) \to k + 1$（Jefferson 方式）が導かれる．また，極限操作により，$u(k, 0) = 1/\log((k + 1)/k)$（TS 方式），$u(k, 1) = (1/e)((k + 1)^{(k+1)}/k^k)$（Theil 方式）が導かれる．さらに，式 (2.3) より，$u(k, -1) = \sqrt{k(k + 1)}$（Hill 方式），$u(k, 2) = k + 1/2$（Webster 方式）が導かれる．文献 [7] の補題 3.3 より $u(k, -4)$ の値は，近似的に $k(k + 1)/(k + 1/2)$ に等しいという意味で Dean 方式が導かれる．

[*1] λ_d の値はしばしば整数と考えられているが，実際は，ある範囲の実数値である（$\ell_d \leq \lambda_d \leq u_d$）．

[*2] 0 と 1 の対数平均は $d(0) = 0$，identric 平均は $d(0) = 1/e$ である．

[*3] $u(0, \theta)$ は $\theta > 0$ の範囲で狭義増加する．

3. 相対的偏り

配分方式の偏りは2種類ある．1つは相対的偏りで，もう1つは絶対的偏りである．前者に関してはこれまで問題となることはなかったが，後者はそうではない．この章では緩和除数方式の相対的偏りについて簡単に述べ，次章で緩和除数方式の絶対的偏りについて議論する．

最初に，配分方式間の相対的偏りの定義を述べる．2つの配分方式 M′ と M を考える．議員定数 h のそれぞれの配分を $(a'_1,\dots,a'_s)$ と $(a_1,\dots,a_s)$ とする．$(a'_1,\dots,a'_s) \neq (a_1,\dots,a_s)$ のとき，任意の2州 i，j に対して，$p_i < p_j$ ならば $a'_i \geq a_i$ または $a'_j \leq a_j$ となるとき，配分方式 M′ は配分方式 M より小州に有利と定義する*1．除数方式に対し，Balinski と Young は次の定理を与えている [1]：

定理 3.1 数列 $\{d'(k)/d(k)\}$（$k \in \mathbb{Z}_0$）が狭義増加するならば，丸め関数 $d'(k)$ を持つ除数方式は丸め関数 $d(k)$ を持つ除数方式よりも小州に有利である．ただし，$0/0 = 0$ とする．

文献 [6] の補題 3.3 より，任意の $\theta' < \theta$ に対し，関数 $g(x) = u(x,\theta')/u(x,\theta)$（$x > 0$）は狭義増加することから，緩和除数方式の偏りに関して，次の結果が得られる．

定理 3.2 任意の $\theta' < \theta$ に対し，パラメータ θ' の緩和除数方式はパラメータ θ の緩和除数方式よりも小州に有利である．

この定理より，パラメータ θ が増加すると，緩和除数方式は徐々に小州有利から大州有利に変化する [5,8,9].

4. 絶対的偏り

最初に，Balinski と Young [1] および Ernst [2] の考えた絶対的偏りをはかるモデルを説明する．人口に比例して議員を配分するという意味では，任意の正の実数 $\mu > 0$ に対し，各州 i の人口 p_i を μp_i に変更しても，問題の本質は変わらない．以下では，人口 p_i は正の実数と仮定する．また，州 i に配分される議員の人数が $a_i = [p_i]_d$ として定まるように人口を標準化*2する．

彼らのモデルでは，$p_1 < p_2$ となる小州1と大州2を考える．$a_i = [p_i]_d > 0$（$i \in \{1,2\}$）かつ $p_1/a_1 < p_2/a_2$ であれば「小州が有利」と定義する．また，人口 p_i（$i \in \{1,2\}$）を確率変数として扱い，「小州が有利」となる確率を尺度*3として，配分方式の絶対的偏りを定

---

*1 これは従来の Balinski と Young の定義を改良したものである．

*2 Ernst は λ を明示しているが，[1] で指摘されているように，以下の議論は λ の値の選択には独立である．

*3 ここでは，「ものさし」の意味で使用する．

義する．具体的には，配分方式の偏りに関して，確率が 1/2 より大であれば，絶対的に小州有利，確率が 1/2 のとき，絶対的に偏りがなく，確率が 1/2 より小であれば，絶対的に大州有利と定義する．以下の第 4.1 節で Balinski と Young による偏りを扱い，第 4.2 節で Ernst の考えた偏りを議論する．

4.1 Balinski と Young による偏り

Balinski と Young は任意の正の整数 $n_i \in \mathbb{Z}_+$ に対し，人口 p_i は区間 $(d(n_i-1), d(n_i))$ 上の連続一様分布（以下では，この分布を BY 分布とよぶ）に従う確率変数と仮定した．ここで，$i \in \{1,2\}$ である．彼らは Hill 方式と Webster 方式に関して，以下の結果を導き，Webster 方式には偏りがなく，Hill 方式は小州に有利であると主張した*1.

定理 4.1 任意の正の整数 $0 < n_1 < n_2$ を持つ BY 分布を仮定したとき，小州 1 が大州 2 より有利となる確率 $\mathbb{P}(p_1/a_1 < p_2/a_2)$ は，Hill 方式の場合 1/2 より大きく，Webster 方式の場合 1/2 に等しい．

定理 4.1 の内容を緩和除数方式全体に拡張すると，以下の結果が得られる．緩和除数方式に対しては，小州 1 が大州 2 より有利となる確率 $\mathbb{P}(p_1/a_1 < p_2/a_2)$ はパラメータ θ の関数となるので，また，記号の簡単化のため，この確率を単に $P(\theta)$ と書く．

定理 4.2 任意の正の整数 $0 < n_1 < n_2$ を持つ BY 分布を仮定したとき，小州 1 が大州 2 より有利となる確率 $P(\theta)$ は，$\theta < 2$ の緩和除数方式の場合 1/2 より大きく，$\theta = 2$ の緩和除数方式（つまり，Webster 方式）の場合 1/2 に等しく，$\theta > 2$ の緩和除数方式の場合 1/2 より小さい*2.

証明 緩和除数方式の丸め関数 $d(k) = u(k,\theta)$ がパラメータ θ の関数であることに注意する．Fig. 1 に示したように，整数 $0 < n_1 < n_2$ に対して，4 点 A$= (d(n_1-1), d(n_2-1))$，B$= (d(n_1), d(n_2-1))$，C$= (d(n_1), d(n_2))$，D$= (d(n_1-1), d(n_2))$ を頂点に持つ，x_1x_2 平面上の長方形を考える．原点 O と点 N$= (n_1, n_2)$ を結ぶ直線と線分 AB および線分 DC の交点を，それぞれ，E$= (d(n_2-1)n_1/n_2, d(n_2-1))$ および F$= (d(n_2)n_1/n_2, d(n_2))$ とする．四角形 AEFD の面積を R_1，四角形 EBCF の面積を R_2 とする．

この時，2 つの四角形の面積 R_1 と R_2 から，小州 1 が大州 2 より有利となる確率は

$$P(\theta) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

となる．$R_1/(R_1+R_2) = 1/(1+R_2/R_1)$ なので，R_2/R_1 を調べ，これが θ に関して狭義増加であることを以下に示す．このことから，$P(\theta)$ が θ に関して狭義減少することが，つまり，θ が増加すると小州有利から大州有利に変化することがわかる．

*1 より正確な主張は文献 [1] の定理 5.2 に述べられている．

*2 文献 [5] の図 1 から本定理が予想されていた．

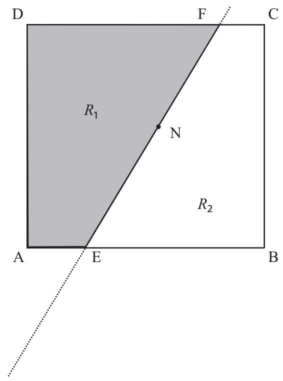

Fig. 1. Regions favoring small and large states under the BY distribution.

簡単な計算より，2 つの面積を求めると

$$R_1 = \frac{\{d(n_2-1)n_1/n_2 - d(n_1-1)\} + \{d(n_2)n_1/n_2 - d(n_1-1)\}}{2}(d(n_2) - d(n_2-1))$$

および

$$R_2 = \frac{\{d(n_1) - d(n_2-1)n_1/n_2\} + \{d(n_1) - d(n_2)n_1/n_2\}}{2}(d(n_2) - d(n_2-1))$$

が得られる．R_2 と R_1 の比を求めると，

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\{d(n_1) - d(n_2-1)n_1/n_2\} + \{d(n_1) - d(n_2)n_1/n_2\}}{\{d(n_2-1)n_1/n_2 - d(n_1-1)\} + \{d(n_2)n_1/n_2 - d(n_1-1)\}}$$

となり，分母と分子の式を整理すると

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{2d(n_1) - \{d(n_2-1) + d(n_2)\}n_1/n_2}{\{d(n_2-1) + d(n_2)\}n_1/n_2 - 2d(n_1-1)}$$

と書ける．いま，$n_2 \geq 2$ なので，$d(n_2-1) + d(n_2) > 0$ であるが，分母と分子をこの項で除すると

$$\frac{R_2}{R_1} = \left\{\frac{2d(n_1)}{d(n_2-1) + d(n_2)} - \frac{n_1}{n_2}\right\} \Big/ \left\{\frac{n_1}{n_2} - \frac{2d(n_1-1)}{d(n_2-1) + d(n_2)}\right\}$$

が導かれる．

緩和除数方式の場合，文献 [5] の補題 3.4 より，任意の実数 $x > y > 0$ を固定したとき[*1] $u(x,\theta)/u(y,\theta)$ は θ に関して狭義減少関数となるので，$1 < n_1 < n_2 - 1$ のとき，

[*1] $\theta > 0$ のとき，容易に，実数 $x > y \geq 0$ の場合に拡張が可能である．

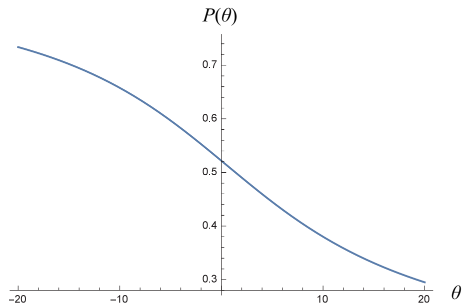

Fig. 2.　Graph of the function $P(\theta)$ with $n_1 = 2$ and $n_2 = 9$ over the interval $-20 \le \theta \le 20$, assuming the BY distribution.

$d(n_2-1)/d(n_1)$，$d(n_2)/d(n_1)$，$d(n_2-1)/d(n_1-1)$，$d(n_2)/d(n_1-1)$ はすべて θ に関して狭義減少となる．よって，

$$\frac{d(n_1)}{d(n_2-1)+d(n_2)} = 1 \Big/ \left\{\frac{d(n_2-1)}{d(n_1)} + \frac{d(n_2)}{d(n_1)}\right\}$$
$$\frac{d(n_1-1)}{d(n_2-1)+d(n_2)} = 1 \Big/ \left\{\frac{d(n_2-1)}{d(n_1-1)} + \frac{d(n_2)}{d(n_1-1)}\right\}$$

はどちらも θ に関して狭義増加となり，R_2/R_1 も狭義増加となる．$n_1 = n_2 - 1$ のとき，および，$n_1 = 1$ のときも上記と同様，R_2/R_1 は θ に関して狭義増加となる．よって，$P(\theta)$ は θ に関して狭義減少となる．

パラメータ θ の値が 2 である Webster 方式の丸め関数 $d(k) = k + 1/2$ を R_1 と R_2 に代入すると，あるいは，幾何学的に考えると，$R_1 + R_2 = 1$，$R_1 = R_2$ が得られ，直ちに，$P(2) = 1/2$ が導かれる．$P(\theta)$ の狭義減少性より，$\theta < 2$ の緩和除数方式では $P(\theta) > 1/2$ となり，$\theta > 2$ の緩和除数方式では $P(\theta) < 1/2$ となる．　□

この定理より，$\theta = -1$ の Hill 方式では，$P(-1) > 1/2$ となり，Hill 方式は小州に有利である．Fig. 2 に，$n_1 = 2$，$n_2 = 9$ のときの確率 $P(\theta)$ のグラフを $-20 \le \theta \le 20$ の範囲で与える．ここで，強調したいが，この定理の証明の中で明らかにした関数 $P(\theta)$ の狭義減少性は，定理 3.2 の内容に合致する．

4.2　Ernst による偏り

一方，Ernst は任意の正の整数 n_i に対し，人口 p_i は区間 $(n_i, n_i + 1)$ 上の連続一様分布に従うと仮定した．以下では，この分布を ER 分布とよぶ．州 i に配分される議員の人数は $a_i = [p_i]_d$ と定義しているので，$n_i < p_i < d(n_i)$ ならば $a_i = n_i$，$d(n_i) < p_i < n_i + 1$ ならば $a_i = n_i + 1$ となる．ここで，$i \in \{1, 2\}$ である．

Ernst は小州 1 が大州 2 より有利となる確率[*1]は，Webster 方式の場合 1/2 より大きい

[*1] 以前とは分布が異なるが，同じ記号 $P(\theta)$ を用いる

ことだけを示し，Webster 方式に偏りがないという Balinski と Young の主張を否定した．しかしながら，Ernst の主張はいささか熟慮に欠ける．なぜならば，ER 分布を仮定したときの Hill 方式の，小州 1 が大州 2 よりも有利となる確率を（意図的であったかどうかは不明であるが）与えなかったからである．これに関して，以下の定理が得られる．

定理 4.3　任意の正の整数 $0 < n_1 < n_2$ を持つ ER 分布を仮定したとき，小州 1 が大州 2 より有利となる確率 $P(\theta)$ は，Hill 方式では $P(-1) < 1/2$，Webster 方式では $P(2) > 1/2$ となる．

以前同様に，この結果を緩和除数方式全体に拡張してから証明をする．そのために，いくつかの準備を以下に行う．

補題 4.4　関数 $u(x,\theta)$（$x > 0$）の x に関する導関数を $u_x(x,\theta)$ とするとき，

$$\frac{u_x(x,\theta)}{u(x,\theta)} = \frac{1}{u(x+1,x;\theta,\theta-1)}$$

となる．

証明　文献 [7] の補題 2.2 で証明されている．□

補題 4.5　関数 $u(x,\theta)$（$x > 0$）の x に関する導関数を $u_x(x,\theta)$ とすると，$\theta < 2$ のとき $u_x(x,\theta) > 1$，$\theta = 2$ のとき $u_x(x,\theta) = 1$，$\theta > 2$ のとき $u_x(x,\theta) < 1$ となる．

証明　定義より，$u(x,\theta) = u(x,x+1;\theta,1)$ であるので，補題 4.4 より，$u_x(x,\theta) = u(x,x+1;\theta,1)/u(x+1,x;\theta,\theta-1)$ が成り立つ．この等式に $\theta = 2$ を代入すると，直ちに，$u_x(x,\theta) = 1$ が得られる．また，関数 $u(x,y;\theta,\omega)$ の ω に関する狭義増加性より，$\theta < 2$ のとき，つまり，$\theta - 1 < 1$ のとき，$u(x+1,x;\theta,\theta-1) < u(x+1,x;\theta,1)$ となる．値が正である左辺の項で両辺を除すると，$u_x(x,\theta) > 1$ の関係が得られる．同様にすれば，$\theta > 2$ のとき，$u_x(x,\theta) < 1$ の関係が得られる．□

補題 4.6　$v(x) = u(x,\theta) - x$（$x > 0$）を定義すると，$\theta < 2$ のとき $v(x)$ は狭義増加で $0 < v(x) < 1/2$，$\theta = 2$ のとき $v(x) = 1/2$，$\theta > 2$ のとき $v(x)$ は狭義減少で $1 > v(x) > 1/2$ となる．

証明　$v(x)$ の増減に関しては，上記の補題 4.5 より明らか．関数の値に関しては，定義より，$\theta = 2$ のとき $u(x,2) = x + 1/2$，つまり $v(x) = 1/2$ である．また，関数 $u(x,\theta)$ は不等式：$x < u(x,\theta) < x + 1$ を満たし，θ に関して狭義増加であることから，$\theta < 2$ のとき $x < u(x,\theta) < u(x,2) = x + 1/2$，つまり，$0 < v(x) < 1/2$ となる．同様に，$\theta > 2$ のとき $1 > v(x) > 1/2$ となる．よって，本補題が成り立つ．□

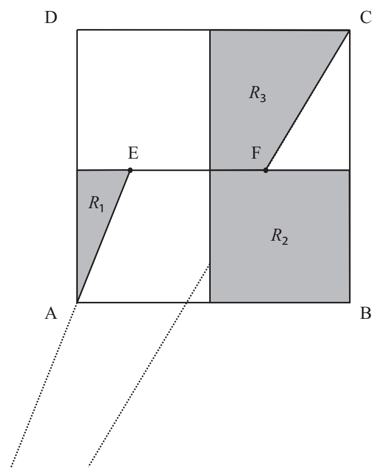

Fig. 3. Regions favoring small and large states under the ER distribution.

定理 4.7 任意の正の整数 $0 < n_1 < n_2$ を持つ ER 分布を仮定したとき，小州 1 が大州 2 より有利となる確率 $P(\theta)$ は，$\theta \leq -1$ の緩和除数方式の場合 1/2 より大きく，$\theta \geq 2$ の緩和除数方式の場合 1/2 より小さい．

証明 Fig. 3 に示したように，整数 $0 < n_1 < n_2$ に対して，4 点 A= (n_1, n_2), B= (n_1+1, n_2), C= (n_1+1, n_2+1)，D= (n_1, n_2+1) を頂点に持つ，x_1x_2 平面上の正方形を考える．原点 O と頂点 A を結ぶ直線と直線 $x_2 = d(n_2)$ の交点を E= $(d(n_2)n_1/n_2, d(n_2))$ とし，原点 O と頂点 C を結ぶ直線と直線 $x_2 = d(n_2)$ の交点を F= $(d(n_2)(n_1+1)/(n_2+1), d(n_2))$ とする．

つぎに，3 点 A，E，$(n_1, d(n_2))$ を頂点に持つ三角形の面積を R_1，4 点 $(d(n_1), n_2)$，B，$(n_1+1, d(n_2))$，$(d(n_1), d(n_2))$ を頂点に持つ四角形の面積を R_2，4 点 $(d(n_1), d(n_2))$，F，C，$(d(n_1), n_2+1)$ を頂点に持つ四角形の面積を R_3 とする．

この時，正方形の面積は 1 なので，小州 1 が大州 2 より有利となる確率 $P(\theta)$ は，

$$P(\theta) = R_1 + R_2 + R_3$$

となる．簡単な計算より

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{n_1}{2n_2}(d(n_2) - n_2)^2 \\
R_2 &= (n_1 + 1 - d(n_1))(d(n_2) - n_2) \\
R_3 &= (n_1 + 1 - d(n_1))(n_2 + 1 - d(n_2)) - \frac{n_1 + 1}{2(n_2 + 1)}(n_2 + 1 - d(n_2))^2
\end{aligned}$$

が導かれる．表記を簡単にするため，補題 4.6 で定義した式を正の整数に限定して用いる．つまり，$v(k) = d(k) - k$（$k \in \mathbb{Z}_+$）を用いると，

$$P(\theta) = \frac{n_1}{2n_2}v^2(n_2) + (1 - v(n_1)) - \frac{n_1 + 1}{2(n_2 + 1)}(1 - v(n_2))^2 \tag{4.1}$$

が導かれる．整数 $0 < n_1 < n_2$ に対し，補題 4.6 より，$\theta \le -1$ のとき，$v(n_1) < v(n_2)$（狭義の不等式であることに注意）となり，$\theta \ge 2$ のとき，$v(n_1) \ge v(n_2)$ となることから，それぞれ，式 (4.1) の右辺の第 2 項の $v(n_1)$ を $v(n_2)$ に置き換えると，

$$P(\theta) > \frac{n_1}{2n_2}v^2(n_2) + (1 - v(n_2)) - \frac{n_1+1}{2(n_2+1)}(1 - v(n_2))^2 \qquad \theta \le -1 \text{ のとき} \tag{4.2}$$

$$P(\theta) \le \frac{n_1}{2n_2}v^2(n_2) + (1 - v(n_2)) - \frac{n_1+1}{2(n_2+1)}(1 - v(n_2))^2 \qquad \theta \ge 2 \text{ のとき} \tag{4.3}$$

となる関係が得られる．この 2 本の不等式の右辺が同一式であること，および，この値と 1/2 の大小関係を求めているので，$v(n_2)$ を x で置き換えた式を 1/2 と置いた方程式

$$\frac{n_1}{2n_2}x^2 + (1 - x) - \frac{n_1+1}{2(n_2+1)}(1 - x)^2 = \frac{1}{2} \tag{4.4}$$

を考えてみる．右辺の 1/2 を左辺に移行した式を変形すると

$$-\frac{n_2 - n_1}{2n_2(n_2+1)}(x^2 + 2n_2x - n_2) = 0$$

となり，正の解として

$$x = \sqrt{n_2(n_2+1)} - n_2$$

が得られる．

$u(x,\theta)$ の定義より $k < u(k,\theta)$ であり，この関数 $u(x,\theta)$ が θ に関して狭義増加であること，および，定義より $u(n_2,-1) = \sqrt{n_2(n_2+1)}$ であることから，$\theta \le -1$ のとき，$n_2 < u(n_2,\theta) \le u(n_2,-1) = \sqrt{n_2(n_2+1)}$ の関係が成り立つ．つまり，$0 < v(n_2) \le \sqrt{n_2(n_2+1)} - n_2$ となるため，$0 < x \le \sqrt{n_2(n_2+1)} - n_2$ の範囲では，式 (4.4) の左辺の 2 次式が凹関数であることを考えると，

$$\frac{n_1}{2n_2}x^2 + (1 - x) - \frac{n_1+1}{2(n_2+1)}(1 - x)^2 \ge \frac{1}{2}$$

が得られる．式 (4.2) と合わせると，$\theta \le -1$ のとき，$P(\theta) > 1/2$ が得られる．

さらに，$\theta \ge 2$ のとき，$n_2 + 1 > u(n_2,\theta) \ge u(n_2,2) = n_2 + 1/2 > u(n_2,-1) = \sqrt{n_2(n_2+1)}$ なので，$1 > v(n_2) \ge 1/2 > \sqrt{n_2(n_2+1)} - n_2$ となる．よって，$1/2 \le x < 1$ の範囲を考えると，狭義の不等式

$$\frac{n_1}{2n_2}x^2 + (1 - x) - \frac{n_1+1}{2(n_2+1)}(1 - x)^2 < \frac{1}{2}$$

が得られる．式 (4.3) と合わせると，$\theta \ge 2$ のとき，$P(\theta) < 1/2$ が得られる．　□

5.　評価

前章の結果を Table 1 にまとめる．尺度 $P(\theta)$ を用いた場合，仮定する分布（BY 分布と ER 分布）の違いに対し，Hill 方式では偏りの結果がどちらも小州有利であるのに対し，Webster 方式の偏りの結果は異なる．

Table 1.　Biases using the measure of $P(\theta)$.

	Hill method	Webster method
BY distribution	favors small states	unbiased
ER distribution	favors small states	favors large states

Ernst の尺度を調べてみると，何かを測る尺度としては不適切な 2 つの性質 (1)，(2) と彼にとって極めて不利な性質 (3) を持つことが判明する．(1) 判定ができない．(2) 判定が間違う．(3)Hill 方式の偏りが Webster 方式の偏りよりも大きい．以下，順にこの 3 つの性質について述べる．

5.1　性質 (1)：判定不能

Ernst の尺度では，$-1 < \theta < 2$ の範囲では，n_1, n_2 のある値に対し $P(\theta) > 1/2$ となる一方，別の値に対して $P(\theta) < 1/2$ となることがある．例えば，$\theta = 1$ のとき，$n_1 = 1, n_2 = 2$ とすれば $P(1) = 0.498 < 1/2$ であるが，$n_1 = 1, n_2 = 3$ とすれば $P(1) = 0.503 > 1/2$ となる．$\theta = 1$ をパラメータに持つ緩和除数方式は Theil 方式であるが，Ernst の尺度を用いた場合，Theil 方式が大州有利か小州有利かの判定はできない．州の数や人口と異なり，現実の問題では n_1, n_2 の値が定まっているわけではない．あるいは，適切な値を定めることは不可能である．そのような意味において，この θ の値をパラメータに持つ緩和除数方式の偏り（大州有利，小州有利）を定めることはできない．

5.2　性質 (2)：誤判定

Balinski と Young の尺度と異なり，ER 分布に従う緩和除数方式の偏り尺度 $P(\theta)$ は狭義減少関数ではない．この性質は緩和除数方式に関する定理 3.2 に矛盾する．このことも，数値例を与えることにより明らかにする．例えば，$n_1 = 1, n_2 = 3$ とすると，$P(-\infty) = 3/4 = 0.75$ であるが，$P(-104) = 0.7554$ となり，減少していないことが確認できる．定理 3.2 の緩和除数方式の偏りの性質より，Adams 方式は $\theta = -104$ をパラメータに持つ緩和除数方式より，小州に有利である．しかしながら，Ernst の尺度はその逆の結果を与えている．つまり，Ernst の尺度は間違った判定結果を与える可能性がある，

5.3 性質 (3)：Hill 方式の偏りは大

ER 分布に従う Hill 方式の，小州有利の確率 $P(-1)$ の $1/2$ からの偏差は Webster 方式のそれより大きい．この意味で，Hill 方式の偏りは Webster 方式の偏りより大きい．以下に，このことを明らかにする．

Hill 方式の丸め関数 $d(k) = \sqrt{k(k+1)}$ を式 (4.1) に代入して，計算を行うと

$$P(-1) = \frac{1}{2} + \left(\sqrt{n_2(n_2+1)} - n_2\right) - \left(\sqrt{n_1(n_1+1)} - n_1\right) \tag{5.1}$$

となる．同じく，Webster 方式の丸め関数 $d(k) = k + 1/2$ を代入して，計算を行うと

$$P(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{n_1+1}{n_2+1} - \frac{n_1}{n_2}\right) \tag{5.2}$$

となる．

式 (5.1) および式 (5.2) の右辺において，確率 $1/2$ からの偏差の量をそれぞれ

$$H = \left(\sqrt{n_2(n_2+1)} - n_2\right) - \left(\sqrt{n_1(n_1+1)} - n_1\right)$$

および

$$W = \frac{1}{8}\left(\frac{n_1+1}{n_2+1} - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

とおく．$0 < n_1 < n_2$ であることから，H と W の値はどちらも正となっている．以下で，$H > W$ を示し，この意味で，Hill 方式の偏りが Webster 方式の偏りより大きいことを示す．

2 以上の整数 m に対し，$0 \leq x \leq m$ を定義域とする関数

$$f(x) = \sqrt{m(m+1)} - m - \left(\sqrt{x(x+1)} - x\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x+1}{m+1} - \frac{x}{m}\right)$$

を考える．明らかに，$f(m) = 0$ である．1 回微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}} - 1\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m}\right) \\ &= 1 - \frac{x+1/2}{\sqrt{x(x+1)}} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) \end{aligned}$$

が得られ，もう 1 回微分すると，$x > 0$ のとき

$$f''(x) = \frac{1}{4x(x+1)\sqrt{x(x+1)}} > 0$$

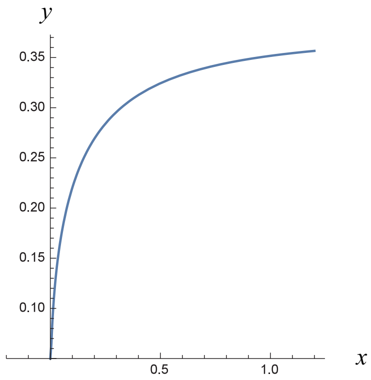

Fig. 4.　Graph of the function $y = \sqrt{x(x+1)} - x - x/(8(x+1))$ over the interval $0 \le x \le 1.2$.

が得られる．つまり，$f(x)$ は狭義の凸関数であることがわかる．だから，$f(m) = 0$ に注意して，$f(m-1)$ の値が正であることを示せば（次節 5.4），$0 \le x \le m-1$ の範囲で $f(x) > 0$ となる．このことは不等式 $H > W$ を意味するので，この意味で，Hill 方式の偏りは Webster 方式の偏りより大きい．

5.4　$f(m-1) > 0$ の証明

いま，$x \ge 0$ を定義域とする関数

$$g(x) = \sqrt{x(x+1)} - x - \frac{x}{8(x+1)}$$

を考える．$f(m-1) = g(m) - g(m-1)$ なので，$g(x)$ が狭義増加関数であることを示せば $f(m-1) > 0$ が導かれる．

$g(x)$ を 2 回微分すると

$$g''(x) = \frac{x\sqrt{x(x+1)} - (x+1)^2}{4(x+1)^2(\sqrt{x(x+1)})^3}$$

が得られる．$x > 0$ のとき，$0 < x^3(x+1) < (x+1)^4$ となるが，これは $0 < x\sqrt{x(x+1)} < (x+1)^2$ を意味する．よって，$x > 0$ のとき，分子は $x\sqrt{x(x+1)} - (x+1)^2 < 0$ となり，関数 $g(x)$ は $x > 0$ の範囲で狭義凹となる．

つぎに，極限 $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ を調べる．そのため，$g(x)$ を

$$g(x) = \sqrt{x(x+1)} - \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8(x+1)}\right)$$

と変形する．ここで，右辺第 1 項は非負の実数 x と $x+1$ の幾何平均であり，第 2 項は同じく算術平均である．良く知られたことであるが（例えば，文献 [6] の定理 4.2 を参照）$\lim_{x\to+\infty} |\sqrt{x(x+1)} - (x+1/2)| = 0$ となるので，$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1/2 - 1/8 = 3/8 = 0.375$

となる．さらに，$g(0) = 0$ に注意すると，$g(x)$ が狭義増加ということがわかる．関数 $y = g(x)$ のグラフを $0 \leq x \leq 1.2$ の範囲で Fig. 4 に与える．このことから，$f(m-1) > 0$ が導かれる．

6. おわりに

かねてより，Balinski と Young は BY 分布を仮定する偏りの尺度を提唱し，現在アメリカの下院議員の配分で使用されている Hill 方式は小州に有利であり，Webster 方式には偏りがないと主張していた．一方，Ernst は裁判の中で BY 分布の代わりに ER 分布を仮定する尺度を提言し，Webster 方式は大州に有利であることを示すことにより，Balinski と Young の主張を否定した．裁判では，両分布の優劣や妥当性について議論されたが，決着はつかなかった．確かに，Hill 方式と Webster 方式のみを比較していると，どちらの分布（尺度）がより妥当であるかは判断し難い．しかしながら，緩和除数方式全体を対象にすると，両者の違いは鮮明である．緩和除数方式はパラメータ θ に関して徐々に小州有利から大州有利に変化するが（定理 3.2），Ernst の尺度はこの事実を反映していない．その結果，ここで示したように，Ernst の尺度は間違った判断をする可能性があり，重要な区間で偏りを測ることができない．つまり，偏りを測る尺度としては不適切である．また，彼の尺度で測ったとしても，Hill 方式の方が Webster 方式より偏りが大きくなり，Hill 方式の合憲性を擁護するには，かえって不都合となる．

参考文献

[1] Balinski, M. L. and Young, H. P., Fair Representation, Yale University Press, New Haven, 1982 (訳書：越山 康, 一森 哲男（訳）, 公正な代表制, 千倉書房, 東京, 1987, 2nd ed., Brookings Institution Press, Washington D.C., 2001).

[2] Ernst L. R., Apportionment methods for the House of Representatives and the court challenges, Management Science, **40** (1994), 1207–1227.

[3] Huntington, E., The apportionment of representatives in Congress, Transactions of the American Mathematical Society, **30** (1928), 85–110.

[4] Ichimori, T., New apportionment methods and their quota property, JSIAM Letters, **2** (2010), 33–36.

[5] Ichimori, T., Relaxed divisor methods and their seat biases, Journal of the Operations Research Society of Japan, **55** (2012), 63–72.

[6] Ichimori, T., A note on relaxed divisor methods, Journal of the Operations Research Society of Japan, **55** (2012), 225–234.

[7] 一森 哲男, 緩和除数方式の比例性と歴史上の 5 方式との関係について, 日本オペレー

ションズ・リサーチ学会和文論文誌, **56** (2013), 1–14.

[8] 一森 哲男, 緩和除数方式の偏りについて, 日本応用数理学会論文誌, **23** (2013), 601–617.

[9] 一森 哲男, ダイバージェンスによる議員定数配分方式の偏りについて, 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, **58** (2015), 42–55.

[10] 薩摩 順吉, 大石 進一, 杉原 正顯 (編), 応用数理ハンドブック, 朝倉書店, 東京, 2013.

[11] Stolarsky, K. B., Generalizations of the logarithmic mean, Mathematics Magazine, **48** (1975), 87–92.

[12] Theil, H., The desired political entropy, American Political Science Review, **63** (1969), 521–525.

[13] Theil, H. and Schrage, L., The apportionment problem and the European Parliament, European Economic Reviews, **9** (1977), 247–263.

[14] Willcox, W., The apportionment of representatives, American Economic Review, **6** (1916), 3–16.

一森 哲男 (正会員)　〒573-0196 大阪府枚方市北山一丁目 79 番 1 号

1982 年大阪大学大学院工学研究科博士課程修了．工学博士．現在，大阪工業大学教授．本学会数理政治学研究部会幹事．2013 年度論文賞受賞．社会システムの研究に従事．日本オペレーションズ・リサーチ学会，情報処理学会会員．