

# 半正定値系に対する Eisenstat SSOR による 右前処理 MINRES 法

杉原 光太\* 速水 謙<sup>†\*</sup> Ning Zheng\*

\* 総合研究大学院大学 <sup>†</sup> 国立情報学研究所

**概要.** 対称半正定値な連立一次方程式の効率的で頑健な反復解法を提案する. 基礎反復法としては最小二乗解に収束する MINRES 法を採用し, それに問題の等価性を保ち易い右前処理を適用する. まず, 右前処理 MINRES 法を定式化し, 特に通常 CG 法の両側前処理の計算量を削減する Eisenstat's trick を SSOR 右前処理に適用した MINRES 法と, 同手法のリスタートを提案し, 有効性を数値実験により報告する.

## Right Preconditioned MINRES Using Eisenstat SSOR for Positive Semidefinite Systems

Kota Sugihara\* Ken Hayami<sup>†\*</sup> Ning Zheng\*

\*SOKENDAI (The Graduate University for Advanced Studies)

<sup>†</sup>National Institute of Informatics

*Abstract.* Consider solving large sparse symmetric positive semidefinite linear systems. Since CG may not converge for inconsistent systems, we use MINRES. We will use right preconditioning for MINRES, since it is easier to preserve the equivalence of the problem, especially for the inconsistent case. We first introduce the algorithm for the right preconditioned MINRES. Then, we propose the right preconditioned MINRES using Eisenstat SSOR. Some numerical experiments indicate that the right preconditioned MINRES using Eisenstat SSOR is efficient and robust. Finally, we show that the residual norm can be further reduced by restarting the method.

### 1. はじめに

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を大規模疎で半正定値対称行列,  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  とし, 連立一次方程式

$$(1.1) \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

または最小二乗問題 ([3])

$$(1.2) \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$$

を数値的に解くことを考える. ここで, 右辺ベクトル  $\mathbf{b}$  は  $R(A)$  ( $A$  の像空間) に必ずしも属しないと仮定する. 以降, 連立一次方程式の右辺ベクトル  $\mathbf{b}$  が  $R(A)$  に属しているか否かで (1.1), (1.2) を以下のように呼ぶ.

- consistent :  $\mathbf{b} \in R(A)$
- inconsistent :  $\mathbf{b} \notin R(A)$

## 1.1 応用分野 1

(1.1) の応用分野の一つとして、次の全周ノイマン問題が挙げられる ([18]).

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (B \nabla u) &= f \text{ in } \Omega \in \mathbb{R}^d \\ -n \cdot (B \nabla u) &= g \text{ on } \Gamma \end{aligned}$$

ここで  $B(x) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{d \times d})$  は半正定値関数とする.

この問題を有限差分法や有限要素法で離散化する場合、領域  $\Omega$  を多角形  $\hat{\Omega}$  で近似する場合の近似誤差が混入するため、対称半正定値な係数行列をもつ、inconsistent な連立一次方程式が得られることが報告されている ([18]).

## 1.2 応用分野 2

(1.1) の応用分野の一つとして、次の準定常電磁場解析が挙げられる ([15]).

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mu \nabla \times \vec{A}_m) + j\omega\sigma(\vec{A}_m + \nabla V) &= \vec{J}_0 \\ j\omega \nabla \cdot \sigma(\vec{A}_m + \nabla V) &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J}_0 &= 0 \end{aligned}$$

ここで  $\vec{A}_m$  はベクトルポテンシャル、 $V$  はスカラーポテンシャル、 $\vec{J}_0$  は強制電流、 $\mu$  は磁気抵抗率、 $\omega$  は角周波数、 $\sigma$  は導電率を表す. この偏微分方程式を辺有限要素法で離散化し、 $\vec{A}_m$ ,  $V$  を未知数とした時、係数行列が半正定値で consistent な連立一次方程式が得られる.

## 1.3 研究課題

係数行列が特異な場合、以下の理由から連立一次方程式が inconsistent になる可能性がある.

1. 領域近似誤差
2. 右辺ベクトルを設定する際の誤差 (観測誤差)
3. 現象をモデリングする際の誤差

ところで、係数行列が特異な場合、連立一次方程式が consistent か inconsistent かは事前にはわからない場合がある. 対称半正定値な係数行列をもつ連立一次方程式が consistent な場合、CG 法は一つの解を与えることが数学的に保証されているが、inconsistent な場合

には、最小二乗解に収束するとは限らない。そこで、我々は対称特異な係数行列をもつ連立一次方程式が inconsistent な場合でも最小二乗解を与える MINRES 法を反復法として選択する。

そこで本論文では係数行列の特異性を考慮した MINRES 法の前処理法を提案する [25, 26]。

まず、文献 [13] で示された定理から MINRES 法を特異な連立一次方程式に適用した場合、inconsistent な場合、問題の等価性を保つためには、左前処理よりも、右前処理の方が前処理行列の選択が容易であることを述べ、右前処理 MINRES 法の定式化を行う。その上で、CG 法の両側前処理において計算量削減のために用いられる Eisenstat's trick をこの右前処理 MINRES 法にも使えるようにした、Eisenstat SSOR 右前処理 MINRES 法 (以後 E-SSOR 右前処理 MINRES 法と呼ぶ) を提案する。また、数値実験により、E-SSOR 右前処理 MINRES 法の有効性を検証する。

本論文の構成は以下のようなものである。次節では、CG 法、MINRES 法について論じる。次に第 3 節では、特異な係数行列をもつ連立一次方程式に右前処理 MINRES 法と左前処理 MINRES 法を適用した場合の問題の等価性を、連立一次方程式が consistent, inconsistent な場合に分けて論じる。その結果、inconsistent な場合、問題の等価性を保つことが、左前処理 MINRES 法より容易である右前処理 MINRES 法の定式化を行う。第 4 節では、E-SSOR 右前処理 MINRES 法を提案する。第 5 節では、E-SSOR 右前処理 MINRES 法、スケーリング右前処理 MINRES 法、前処理なし MINRES 法を対称半正定値な係数行列をもつ連立一次方程式に適用した場合の数値実験を通して、E-SSOR 右前処理 MINRES 法の有効性を検証し、最後に第 6 節でまとめを行う。

## 2. 特異系に対する反復解法

文献 [14] より、係数行列  $A$  が対称な場合は、MINRES 法は GMRES 法 ([23, 24]) と数学的に等価であり、 $R(A) = R(A^T)$  なので、GMRES 法が破綻なく収束するための必要十分条件を満たすので、MINRES 法も特異系に対し、破綻なく収束する。

CG 法 ([27]), MINRES 法 ([10, 12, 20, 28]) はいずれも Krylov 部分空間法の手法であり、CG 法の方が MINRES 法より一反復あたりの演算量が少ない。特異な係数行列をもつ連立一次方程式に適用した場合には各々以下のような特徴がある。

### CG 法、MINRES 法の特徴

1. CG 法: 係数行列が半正定値の場合、consistent な場合、一つの解への収束が保証されているが、inconsistent な場合、最小二乗解に必ずしも収束しない。
2. MINRES 法: 係数行列が特異な場合、consistent, inconsistent に関わらず (最小二乗) 解を与える。不定値行列の場合も解を与える

応用分野 2 のように係数行列が半正定値で consistent な連立一次方程式となる応用例も

あるが、一般に偏微分方程式や積分方程式の離散化により得られた特異系では、1.3 節で述べたように、連立一次方程式が **inconsistent** になる場合がある。対称特異な係数行列をもつ連立一次方程式が与えられた時、係数行列の核空間または値域がわかれば、右辺ベクトルを係数行列の値域成分に射影することにより、元々 **inconsistent** な場合でも **consistent** な連立一次方程式として解くことは可能であるが、一般には行列の核空間または値域はわからない。そこで本研究では **consistent**, **inconsistent** に関わらず、対称特異な係数行列をもつ連立一次方程式の（最小二乗）解を得るために MINRES 法を用いる。

## 2.1 MINRES 法

Krylov 部分空間を  $K_k(A, \mathbf{r}_0) = \text{span}(\mathbf{r}_0, A\mathbf{r}_0, \dots, A^{k-1}\mathbf{r}_0)$  とする。ここで  $\mathbf{x}_0$  は反復法における初期近似解、 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$  は初期残差ベクトルを意味する。MINRES 法は係数行列が対称な連立一次方程式に対し、

$$\mathbf{x}_k \in \mathbf{x}_0 + K_k(A, \mathbf{r}_0) \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k\|_2 = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$$

となる解  $\mathbf{x}_k$  を求める反復法である。そのアルゴリズムを **Algorithm 1** に示す。

---

### Algorithm 1 : MINRES method

```

1:  $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{0}$ 
2: Choose initial approximate solution  $\mathbf{x}^{(0)}$ , compute  $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$ 
3: Set  $\gamma_1 = \|\mathbf{v}^{(1)}\|_2$ , set  $\eta = \gamma_1, s_0 = s_1 = 0, c_0 = c_1 = 1$ 
4: for  $j = 1$  until convergence do
5:    $\mathbf{v}^{(j)} = \mathbf{v}^{(j)} / \gamma_j$ 
6:    $\delta_j = (A\mathbf{v}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)})$ 
7:    $\mathbf{v}^{(j+1)} = A\mathbf{v}^{(j)} - \delta_j\mathbf{v}^{(j)} - \gamma_j\mathbf{v}^{(j-1)}$ 
8:    $\gamma_{j+1} = \|\mathbf{v}^{(j+1)}\|_2$ 
9:    $\alpha_0 = c_j\delta_j - c_{j-1}s_j\gamma_j, \alpha_1 = \sqrt{\alpha_0^2 + \gamma_{j+1}^2}$ 
10:   $\alpha_2 = s_j\delta_j + c_{j-1}c_j\gamma_j, \alpha_3 = s_{j-1}\gamma_j$ 
11:   $c_{j+1} = \alpha_0/\alpha_1, s_{j+1} = \gamma_{j+1}/\alpha_1$ 
12:   $\mathbf{w}^{(j+1)} = (\mathbf{v}^{(j)} - \alpha_3\mathbf{w}^{(j-1)} - \alpha_2\mathbf{w}^{(j)})/\alpha_1$ 
13:   $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + c_{j+1}\eta\mathbf{w}^{(j+1)}$ 
14:   $\eta = -s_{j+1}\eta$ 
15:   $\mathbf{r}_j = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(j)}$ 
16:  check convergence
17: end do
```

---

ここで、係数行列が正則な場合または特異行列でも **consistent** な連立一次方程式の場合、15 行目の残差ベクトル  $\mathbf{r}_j$  は計算する必要がなく、14 行目で計算する  $\eta$  に対して  $|\eta|$  は残差ノルムになるので、これを用いて 16 行目の収束判定を行うことができる。しかしなが

ら、係数行列が特異かつ連立一次方程式が *inconsistent* な場合、 $\|\eta\|$  は必ずしも残差ノルムにならないので、16 行目の収束判定には、15 行目の残差ベクトルの計算が必要となる。

### 3. 前処理付き MINRES 法

文献 [10] では係数行列が正則な連立一次方程式に MINRES 法を適用する場合、以下の 2 つの理由から前処理行列  $M$  は正定値対称でなければならないとしている。

- 前処理付き MINRES 法は、行列  $M^{-1}$  に関する残差ノルムを最小化しているため、 $M^{-1}$  に関するノルムを定義できなければならない。
- 正定値対称行列  $M$  はコレスキー分解  $LL^T$  ( $L^T$  は  $L$  の転置行列を意味する) できるので、両側前処理を用いることにより、前処理後の係数行列の対称性が保たれ、MINRES 法が直接適用可能である。

しかしながら、係数行列が特異な場合についての前処理の仕方については文献 [10] では議論がされていない。そこで以下 3.1 節では実対称特異な係数行列をもつ連立一次方程式に MINRES 法を適用する場合の前処理の仕方について議論し、*inconsistent* な連立一次方程式の場合、左前処理よりも右前処理の方が問題の等価性を保ちやすいことを示す。また 3.2 節では、3.1 節での議論を踏まえ、右前処理 MINRES 法の定式化を行う。

#### 3.1 右前処理、左前処理の選択

MINRES 法が Krylov 部分空間において残差の 2 乗ノルムを最小化する解を求める手法であることは、2.1 章で述べた。文献 [13] に残差の 2 乗ノルムを最小化する解を見つける問題に関して、行列  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  が与えられたとき、行列  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  を右前処理とした場合については定理 3.1 が示されている。

**定理 3.1 ([13], 2010)** (右前処理の場合) 行列  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  に対して、

$$(3.1) \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2 = \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m} \|\mathbf{b} - AB\mathbf{z}\|_2 \text{ for } \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

の必要十分条件は  $R(A) = R(AB)$  である。

一方、行列  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  を左前処理とした場合については定理 3.2 が示されている。

**定理 3.2 ([13], 2010)** (左前処理の場合) 行列  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  に対して、

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*\|_2 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2 \Leftrightarrow \|B\mathbf{b} - BA\mathbf{x}^*\|_2 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|B\mathbf{b} - BA\mathbf{x}\|_2 \text{ for } \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

の必要十分条件は  $R(A) = R(B^T BA)$  である。

ここではさらに特異な係数行列を持つ連立一次方程式が *consistent* である場合、定理 3.1、定理 3.2 それぞれが示す右前処理および左前処理した際の問題の等価性を保つため

の必要十分条件が緩和できるかどうかを検証する。ただし、 $N(B)$  は行列  $B$  の核空間を意味する。

左前処理の場合については、以下の定理 3.3 が示すように、連立一次方程式が consistent なとき、問題の等価性を保つための必要十分条件を緩めることができる。

**定理 3.3**  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  とする。

$b \in R(A)$  ならば、 $BAx = Bb \Rightarrow Ax = b$  の必要十分条件は  $R(A) \cap N(B) = \{0\}$  である。  
( $[BAx = Bb \Leftarrow Ax = b]$  は常に成立する。)

**証明**  $b \in R(A)$  ならば  $r = b - Ax \in R(A)$  が成立する。したがって、

$Bb - BAx = Br = 0 \iff r \in R(A) \cap N(B)$  が成り立つ。よって  $Br = 0$  ならば  $r = b - Ax = 0$  が成立するための必要十分条件は  $R(A) \cap N(B) = \{0\}$  である。  $\square$

定理 3.3 が示す、consistent な連立一次方程式に対して左前処理を適用した場合に、問題の等価性を保つ必要十分条件を満たす特殊な場合として、以下の注意 1, 注意 2, 注意 3 を示す。

**注意 1**  $\text{rank}(B) = m (\leq l) \iff N(B) = \{0\} \implies R(A) \cap N(B) = \{0\}$

**注意 2** 特に  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  が正則行列ならば  $N(B) = \{0\}$  であるので、 $R(A) \cap N(B) = \{0\}$  が成立する。

線形代数的にも下記が成立する。

**注意 3**  $R(A) = R(B^T BA) \implies R(A) \cap N(B) = \{0\}$

**証明**  $R(A) = R(B^T BA) \subseteq R(B^T)$ ,  $N(B) = R(B^T)^\perp$   $\square$

したがって、確かに定理 3.3 の consistent な場合の条件は、定理 3.2 の inconsistent な場合の条件よりも緩くなっている。

次に、定理 3.1 が示す、右前処理した場合の問題の等価性を保つ必要十分条件が、連立一次方程式が consistent な場合に緩和できるか検証する。そこで、以下の定理 3.4 が成立する。

**定理 3.4**  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  とする。

$b \in R(A)$  ならば、  
(3.2)  $\exists x \in \mathbb{R}^n; Ax = b \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}^l; ABz = b$

の必要十分条件は  $R(A) = R(AB)$  である。(  $[\exists x \in \mathbb{R}^n; Ax = b \Leftarrow \exists z \in \mathbb{R}^l; ABz = b]$  は常に成立する。)



**証明**  $R(A) = R(AB)$  が十分条件になることをまず証明する.  $R(A) \equiv \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ ,  $R(AB) \equiv \{ABz \mid z \in \mathbb{R}^l\}$  であるので,  $R(A) = R(AB)$  であるための必要十分条件は,  $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{ABz \mid z \in \mathbb{R}^l\}$  である.

$b \in R(A)$  より,  $\exists x \in \mathbb{R}^n; Ax = b \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}^l; ABz = b$  が成立する.

次に  $R(A) = R(AB)$  が必要条件になることを背理法で証明する.  $R(A) \neq R(AB)$  とすると  $R(A) \supset R(AB)$  であるから  $\exists b \in R(A) \setminus R(AB)$  である.

$\exists b \in R(A) \setminus R(AB) \Leftrightarrow \exists b, \exists x; b = Ax, b \neq ABz \text{ for all } z \in \mathbb{R}^l$  が成立する.

したがって,  $\exists x \in \mathbb{R}^n; Ax = b \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}^l; ABz = b$  が成立しない  $b \in R(A)$  が存在する. よって  $R(A) = R(AB)$  が必要条件であることが示された.  $\square$

定理 3.4 より, 定理 3.1 が示す, 右前処理した場合の問題の等価性を保つ必要十分条件は, 連立一次方程式が consistent な場合でも緩和できず, 同様の必要十分条件であることが示された.

定理 3.4 が示す, consistent な連立一次方程式に対して右前処理を適用した場合に, 問題の等価性を保つ必要十分条件を満たす特殊な場合として, 以下の注意 4 を示す.

**注意 4** 行列  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  が正則ならば,  $R(A) = R(AB)$  が成立する.

**証明**  $R(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{ABB^{-1}x \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{ABz \mid z = B^{-1}x, x \in \mathbb{R}^n\} = \{ABz \mid z \in \mathbb{R}^n\} = R(AB)$   $\square$

したがって, 行列  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  が正則ならば, 行列  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  に対して, 定理 3.4 から式 (3.2) が成立する.

以上の議論から特異な係数行列をもつ連立一次方程式が consistent な場合, 行列  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は特異行列, 行列  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は正則行列としたとき,

$$(3.3) \quad Ax = b \Leftrightarrow BAx = Bb \Leftrightarrow ABz = b, (x = Bz)$$

が成立する. 式 (3.3) が意味することは, 特異な係数行列をもつ, consistent な連立一次方程式に対して左前処理, 右前処理をしても前処理行列が正則であるという条件のみで問題の等価性が保たれることである.

次に特異な係数行列をもつ連立一次方程式が inconsistent な場合について議論する.

$A$  が特異行列で  $B$  が正則行列の場合,

- $R(A) = R(AB)$  は成立するが,
- $R(A) = R(B^T BA)$  は必ずしも成立しない.

さて, 右前処理の場合は, 定理 3.1(および定理 3.4) から, 特異行列  $A$  を係数行列とする連立一次方程式に対して,  $B$  が正則行列でありさえすれば, 行列  $B$  を前処理行列とした右前処理を用いれば元の問題 (1.1) または (1.2) の等価性は保つことができる.

一方で左前処理の場合は、元の連立一次方程式の係数行列  $A$  が特異で inconsistent な場合  $B$  が正則行列という条件だけでは、 $R(A) = R(B^T BA)$  は必ずしも成立しないため、問題の等価性が保たれるとは限らない。

そこで本研究では特異な係数行列をもつ連立一次方程式に前処理を適用する場合、inconsistent な場合でも  $B$  を正則行列とするだけで問題の等価性が保たれる右前処理を採用することとし、以降では consistent な場合も含めて右前処理について論じる。

### 3.2 右前処理 MINRES 法

$M$  を対称正定値行列とし、元の最小二乗問題  $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$  に対し、右前処理した特異な係数行列をもつ最小二乗問題

$$(3.4) \quad \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - AM^{-1}\mathbf{z}\|_2$$

を考える。 $M^{-1}$  は正定値行列であるので、正則行列である。したがって  $R(A) = R(AM^{-1})$  を満たすので  $B = M^{-1}$  として、式 (3.1) および式 (3.2) が成立し、式 (3.4) と式 (1.2) は等価である。

しかしながら、式 (3.4) において行列  $A$  と  $M$  がそれぞれ対称であっても、係数行列  $AM^{-1}$  は対称とは限らない。このため、(特異な係数行列をもつ最小二乗問題)(3.4) に  $\mathbb{R}^n$  の標準内積を使った通常の MINRES 法は適用できない。

そこで式 (3.4) に MINRES 法を適用して、右前処理 MINRES 法のアルゴリズムを導出するために以下のポイントを利用する。ただし、

**定義 3.5**  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{M^{-1}} = \mathbf{x}^T M^{-1} \mathbf{y}$

と定義する。行列  $M$  が対称正定値なため、上記は内積の条件を満たしている。ここで  $A$  は対称なので  $(AM^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{y})_{M^{-1}} = (\mathbf{x}, AM^{-1}\mathbf{y})_{M^{-1}}$  より、右前処理した係数行列  $AM^{-1}$  は行列  $M^{-1}$  に関する内積について自己随伴なので、行列  $M^{-1}$  に関する内積空間における MINRES 法を最小二乗問題 (3.4) に適用することが可能である。このようにして導出した右前処理 MINRES 法のアルゴリズムの概要は **Algorithm 2** のようになる。

---

#### Algorithm 2 : Right preconditioned MINRES (essence)

---

1: Find

$$\mathbf{z}_k \in M\mathbf{x}_0 + K_k(AM^{-1}, \mathbf{r}_0) \text{ s.t. } \|\mathbf{b} - AM^{-1}\mathbf{z}_k\|_{M^{-1}} = \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - AM^{-1}\mathbf{z}\|_{M^{-1}}$$

2: Compute the solution  $\mathbf{x}_k = M^{-1}\mathbf{z}_k$

---

右前処理 MINRES 法では  $M^{-1}$  に関するノルムでの残差ノルムを最小化する。したがって、inconsistent な場合は一般に元の残差の 2 ノルム最小の解とは異なる解を与える。さ



らに, **Algorithm 3** に定式化した右前処理 MINRES 法のアルゴリズムを示す.  $M$  は前処理行列を意味する.

---

**Algorithm 3 : Right preconditioned MINRES method**

---

1.  $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{0}$
  - 2: Choose initial approximate solution  $\mathbf{x}^{(0)}$ , compute  $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$
  - 3:  $\mathbf{u}^{(1)} = M^{-1}\mathbf{v}^{(1)}$
  - 4: Set  $\gamma_1 = \sqrt{(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)})}$ , set  $\eta = \gamma_1, s_0 = s_1 = 0, c_0 = c_1 = 1$
  - 5: for  $j = 1$  until convergence do
  - 6:      $\mathbf{v}^{(j)} := \mathbf{v}^{(j)}/\gamma_j, \mathbf{u}^{(j)} := \mathbf{u}^{(j)}/\gamma_j$
  - 7:      $\delta_j = (\mathbf{u}^{(j)}, A\mathbf{u}^{(j)})$
  - 8:      $\mathbf{v}^{(j+1)} = A\mathbf{u}^{(j)} - \delta_j\mathbf{v}^{(j)} - \gamma_j\mathbf{v}^{(j-1)}$
  - 9:      $\mathbf{u}^{(j+1)} = M^{-1}\mathbf{v}^{(j+1)}$
  - 10:      $\gamma_{j+1} = \sqrt{(\mathbf{v}^{(j+1)}, \mathbf{u}^{(j+1)})}$
  - 11:      $\alpha_0 = c_j\delta_j - c_{j-1}s_j\gamma_j, \alpha_1 = \sqrt{\alpha_0^2 + \gamma_{j+1}^2}$
  - 12:      $\alpha_2 = s_j\delta_j + c_{j-1}c_j\gamma_j, \alpha_3 = s_{j-1}\gamma_j$
  - 13:      $c_{j+1} = \alpha_0/\alpha_1, s_{j+1} = \gamma_{j+1}/\alpha_1$
  - 14:      $\mathbf{w}^{(j+1)} = (\mathbf{u}^{(j)} - \alpha_3\mathbf{w}^{(j-1)} - \alpha_2\mathbf{w}^{(j)})/\alpha_1$
  - 15:      $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + c_{j+1}\eta\mathbf{w}^{(j+1)}$
  - 16:      $\eta = -s_{j+1}\eta$
  - 17:      $\mathbf{r}_j = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(j)}$
  - 18:     check convergence
  - 19: end do
- 

ここで, 元の連立一次方程式の残差ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$  の右前処理 MINRES 法における挙動を解析する. そのために, まず右前処理 MINRES 法は, 係数行列が対称である連立一次方程式 (1.1) に適用した場合, 特異で consistent な系に対し, 任意の右辺ベクトル, 初期ベクトルに対して, 前処理行列を  $M$  としたとき,  $M^{-1}$  に関するノルムでの残差ノルムを最小化する解に破綻することなく収束するという定理を示す.

さらにその定理と重み付き最小二乗問題の一般論 (重み付き最小二乗問題と重み付き正規方程式が等価であること) から, 右前処理 MINRES 法の残差ノルムの挙動について論じる.

**Algorithm 2, Algorithm 3** で示した右前処理 MINRES 法を係数行列が正則, 特異いずれの場合も含めて係数行列が対称な連立一次方程式に適用した場合に以下の定理が成立する.

**定理 3.6** 右前処理 MINRES 法は, 正則な系のみならず, 特異で consistent な系に対しても, 任意の  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , 任意の初期ベクトル  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n (= M^{-1}\mathbf{z}^{(0)})$  に対し, 破綻することなく

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_{M^{-1}} = \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - AM^{-1}\mathbf{z}\|_{M^{-1}}$$

の解  $\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{z}$  に収束する. ここで行列  $M$  は **Algorithm 2, Algorithm 3** における正定値対称行列  $M$  である.

証明

$\text{rank}(A) = \dim R(A) = r > 0$  とし,

(3.5)  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r : R(A)$  における行列  $M^{-1}$  に関する内積空間での直交基底

(3.6)  $\mathbf{q}_{r+1}, \dots, \mathbf{q}_n : R(A)^{\perp_{M^{-1}}}$  における行列  $M^{-1}$  に関する内積空間での直交基底

とする. ここで,  $R(A)^{\perp_{M^{-1}}}$  は  $R(A)$  の行列  $M^{-1}$  に関する内積空間での直交補空間を意味する. そこで, 行列  $Q_1, Q_2, Q$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned} Q_1 &:= [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r] \in \mathbb{R}^{n \times r} \\ Q_2 &:= [\mathbf{q}_{r+1}, \dots, \mathbf{q}_n] \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)} \\ Q &:= [Q_1, Q_2] \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

(3.5), (3.6) から, 行列  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を単位行列としたとき,

$$(3.7) \quad Q^T M^{-1} Q = I_n$$

が成立する. さらに行列  $M$  が対称行列であることを利用すると,

$$\begin{aligned} Q^T M^{-1} Q &= (M^{-\frac{1}{2}} Q)^T M^{-\frac{1}{2}} Q \\ &= M^{-\frac{1}{2}} Q (M^{-\frac{1}{2}} Q)^T \\ &= M^{-\frac{1}{2}} Q Q^T M^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となることと, (3.7) から,

$$(3.8) \quad Q Q^T = M$$

が成立する. 行列  $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を  $\hat{A} := Q^T M^{-1} A M^{-1} Q$  と定義すると,  $Q_2^T M^{-1} A = 0$  なので,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} Q_1^T M^{-1} A M^{-1} Q_1 & Q_1^T M^{-1} A M^{-1} Q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行列  $A$ ,  $M$  が対称行列であることから行列  $\hat{A}$  は対称行列になるため,  $Q_1^T M^{-1} A M^{-1} Q_2 = 0$  になる. したがって, 行列  $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  を  $A_{11} := Q_1^T M^{-1} A M^{-1} Q_1$  と定義すると,

$$(3.9) \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 行列  $Q$ ,  $M$  が正則であることから,  $\text{rank}(A) = r = \text{rank}(\hat{A}) = \text{rank}(A_{11})$  であることから, 行列  $A_{11}$  は正則行列になる.

そこで, 本定理を証明するにあたり, 文献 [14] での GMRES 法を特異系も含めた系に適用した場合の挙動解析にあたり, GMRES 法を  $R(A)$  成分と  $R(A)^\perp$  成分に分割しているように, 右前処理 MINRES 法を  $R(A)$  成分と  $R(A)^{\perp_{M^{-1}}}$  成分に分割したアルゴリズムを考える.

まず, 残差ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - AM^{-1}\mathbf{z}$  ( $\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{z}$ ) に対して,  $\|\mathbf{r}\|_{M^{-1}}$  を分析するため,  $\tilde{\mathbf{r}} := Q^T M^{-1} \mathbf{r}$  を定義して,  $\tilde{\mathbf{r}}$  を使う. そうすると, (3.8), (3.9) を利用すると,

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}} &= Q^T M^{-1} \mathbf{r} \\ &= Q^T M^{-1} \mathbf{b} - Q^T M^{-1} A M^{-1} (Q Q^T M^{-1}) M \mathbf{x} \\ &= Q^T M^{-1} \mathbf{b} - \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T M^{-1} \mathbf{z} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 - A_{11} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる. ただし,

$$Q^T M^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

とし,  $\mathbf{z}_1 = Q_1^T M^{-1} \mathbf{z}$  としている.

一方, (3.8) から,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}} &= Q^T M^{-1} \mathbf{r} \\ &= Q^{-1} \mathbf{r} \end{aligned}$$

であることから  $\mathbf{r} = Q \tilde{\mathbf{r}}$  となる.

したがって, (3.7), (3.8) を利用すると,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_{M^{-1}}^2 &= \|\mathbf{b} - AM^{-1}\mathbf{z}\|_{M^{-1}}^2 \\ &= \|\mathbf{r}\|_{M^{-1}}^2 \\ &= \mathbf{r}^T M^{-1} \mathbf{r} \\ &= \tilde{\mathbf{r}}^T Q^T M^{-1} Q \tilde{\mathbf{r}} \\ &= \tilde{\mathbf{r}}^T \tilde{\mathbf{r}} \\ &= \|\tilde{\mathbf{r}}\|_2^2 \end{aligned}$$

となる. よって, (3.10) より,

$$(3.11) \quad \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_{M^{-1}}^2 = \|\mathbf{b} - AM^{-1}\mathbf{z}\|_{M^{-1}}^2 = \|\mathbf{r}\|_{M^{-1}}^2 = \|\tilde{\mathbf{r}}\|_2^2 = \|\mathbf{b}_1 - A_{11}\mathbf{z}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2$$

となる.

ここで右前処理 MINRES 法は, **Algorithm 2** の 1 が示すように  $\mathbf{z}_k$  を求めた上で, **Algorithm 2** の 2 が示すように  $\mathbf{x}_k = M^{-1}\mathbf{z}_k$  を求める手法である.

(3.11) を踏まえて, 係数行列  $A$  が特異の場合を考慮し, 右前処理 MINRES 法を,  $R(AM^{-1})$  成分と  $R(AM^{-1})^{\perp_{M^{-1}}}$  成分に分割した右前処理 MINRES 法 (以後分割版右前処理 MINRES 法と呼ぶ) のアルゴリズムを **Algorithm 4** に示す.

---

**Algorithm 4 : Decomposed Right preconditioned MINRES method**

---

|                                                                                                                                                                 |                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R(AM^{-1}) = R(A)$ 成分                                                                                                                                          | $R(AM^{-1})^{\perp_{M^{-1}}} = R(A)^{\perp_{M^{-1}}}$ 成分                                                           |
| 1. $\mathbf{v}_1^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}_1^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}_1^{(1)} = \mathbf{0}$                                                          | $\mathbf{v}_2^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}_2^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}_2^{(1)} = \mathbf{0}$                |
| 2. $\mathbf{b}_1 = Q_1^T M^{-1} \mathbf{b}$                                                                                                                     | $\mathbf{b}_2 = Q_2^T M^{-1} \mathbf{b}$                                                                           |
| 3: Choose initial approximate solution $\mathbf{z}^{(0)} (= M\mathbf{x}^{(0)})$                                                                                 |                                                                                                                    |
| 4: Compute $\mathbf{z}_1^{(0)} = Q_1^T M^{-1} \mathbf{z}^{(0)}$                                                                                                 | $\mathbf{z}_2^{(0)} = Q_2^T M^{-1} \mathbf{z}^{(0)}$                                                               |
| 5: $\mathbf{v}_1^{(1)} = \mathbf{b}_1 - A_{11}\mathbf{z}_1^{(0)}$                                                                                               | $\mathbf{v}_2^{(1)} = \mathbf{b}_2$                                                                                |
| 6: Set $\gamma_1 = \ \mathbf{v}^{(1)}\ _{M^{-1}} = \ Q^T M^{-1} \mathbf{v}^{(1)}\ _2 = (\ \mathbf{v}_1^{(1)}\ _2^2 + \ \mathbf{v}_2^{(1)}\ _2^2)^{\frac{1}{2}}$ |                                                                                                                    |
| 7: Set $\eta = \gamma_1, s_0 = s_1 = 0, c_0 = c_1 = 1$                                                                                                          |                                                                                                                    |
| 8: for $j = 1$ until convergence do                                                                                                                             |                                                                                                                    |
| 9: $\mathbf{v}_1^{(j)} := \mathbf{v}_1^{(j)} / \gamma_j$                                                                                                        | $\mathbf{v}_2^{(j)} := \mathbf{v}_2^{(j)} / \gamma_j$                                                              |
| 10: $\delta_j = (M^{-1}\mathbf{v}^{(j)}, AM^{-1}\mathbf{v}^{(j)}) = (\mathbf{v}_1^{(j)}, A_{11}\mathbf{v}_1^{(j)})$                                             |                                                                                                                    |
| 11: $\mathbf{v}_1^{(j+1)} = A_{11}\mathbf{v}_1^{(j)} - \delta_j\mathbf{v}_1^{(j)} - \gamma_j\mathbf{v}_1^{(j-1)}$                                               | $\mathbf{v}_2^{(j+1)} = -\delta_j\mathbf{v}_2^{(j)} - \gamma_j\mathbf{v}_2^{(j-1)}$                                |
| 12: $\gamma_{j+1} = \ \mathbf{v}^{(j+1)}\ _{M^{-1}} = (\ \mathbf{v}_1^{(j+1)}\ _2^2 + \ \mathbf{v}_2^{(j+1)}\ _2^2)^{\frac{1}{2}}$                              |                                                                                                                    |
| 13: $\alpha_0 = c_j\delta_j - c_{j-1}s_j\gamma_j, \alpha_1 = \sqrt{\alpha_0^2 + \gamma_{j+1}^2}$                                                                |                                                                                                                    |
| 14: $\alpha_2 = s_j\delta_j + c_{j-1}c_j\gamma_j, \alpha_3 = s_{j-1}\gamma_j$                                                                                   |                                                                                                                    |
| 15: $c_{j+1} = \alpha_0/\alpha_1, s_{j+1} = \gamma_{j+1}/\alpha_1$                                                                                              |                                                                                                                    |
| 16: $\mathbf{w}_1^{(j+1)} = (\mathbf{v}_1^{(j)} - \alpha_3\mathbf{w}_1^{(j-1)} - \alpha_2\mathbf{w}_1^{(j)})/\alpha_1$                                          | $\mathbf{w}_2^{(j+1)} = (\mathbf{v}_2^{(j)} - \alpha_3\mathbf{w}_2^{(j-1)} - \alpha_2\mathbf{w}_2^{(j)})/\alpha_1$ |
| 17: $\mathbf{z}_1^{(j)} = \mathbf{z}_1^{(j-1)} + c_{j+1}\eta\mathbf{w}_1^{(j+1)}$                                                                               | $\mathbf{z}_2^{(j)} = \mathbf{z}_2^{(j-1)} + c_{j+1}\eta\mathbf{w}_2^{(j+1)}$                                      |
| 18: $\eta = -s_{j+1}\eta$                                                                                                                                       |                                                                                                                    |
| 19: $\ \mathbf{r}_1^{(j)}\ _2 = \ \mathbf{b}_1 - A_{11}\mathbf{z}_1^{(j)}\ _2$                                                                                  |                                                                                                                    |
| 20: check convergence                                                                                                                                           |                                                                                                                    |
| 21: $\mathbf{x}^{(j)} = M^{-1}(Q_1\mathbf{z}_1^{(j)} + Q_2\mathbf{z}_2^{(j)})$                                                                                  |                                                                                                                    |
| 22: end do                                                                                                                                                      |                                                                                                                    |

---

ここで注意点としては分割しているのは解  $\mathbf{x}$  を求める部分ではなく,  $\mathbf{z} = M\mathbf{x}$  を求めているところであり, 21 行目は  $R(AM^{-1})$  成分と  $R(AM^{-1})^{\perp_{M^{-1}}}$  成分には分割していない.

正則な系, 特異で consistent な系では  $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$  なので, **Algorithm 4** で示した分割版右前処理 MINRES 法の  $R(AM^{-1})$  成分は,  $A_{11}$  が正則な対称行列であるため,  $A_{11}\mathbf{z}_1 = \mathbf{b}_1$  に適用した MINRES 法と等価である. 係数行列が対称な場合には MINRES 法と GMRES 法は等価であることと, 文献 [24] が論じている GMRES 法が係数行列が正則な連立一次方程式に適用された際に破綻することなく最小二乗解に収束することを示す議論から, MINRES 法は対称正則な系に破綻することなく最小二乗解に収束する. したがって, **Algorithm 4** で示した分割版右前処理 MINRES 法の  $R(AM^{-1})$  成分についても特異で consistent な系に対して, 以下が成立する.

分割版右前処理 MINRES 法の  $R(AM^{-1})$  成分での  $\mathbf{z}_1^{(j)}$  が  $\min_{\mathbf{z}_1 \in \mathbb{R}^r} \|\mathbf{b}_1 - A_{11}\mathbf{z}_1\|_2$  の解  $\Leftrightarrow \gamma_{j+1} = 0$

上記は, MINRES 法が係数行列が正則かつ対称な連立一次方程式に適用された場合, 破綻することなく最小二乗解に収束することと同じことである.

行列  $A_{11}$  は正則なので, 分割版右前処理 MINRES 法の  $R(AM^{-1})$  成分での  $\mathbf{z}_1^{(j)}$  が

$$\min_{\mathbf{z}_1 \in \mathbb{R}^r} \|\mathbf{b}_1 - A_{11}\mathbf{z}_1\|_2$$

の解であれば,  $\|\mathbf{b}_1 - A_{11}\mathbf{z}_1^{(j)}\|_2 = 0$  が成立する.

したがって, (3.11) より, 右前処理 MINRES 法は特異で consistent な系ならびに正則な系に対して, 任意の  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , 任意の初期ベクトル  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n (= M^{-1}\mathbf{z}^{(0)})$  に対し, 破綻することなく

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_{M^{-1}} = \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - AM^{-1}\mathbf{z}\|_{M^{-1}}$$

の解  $\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{z}$  に収束する.

□

また重み付き最小二乗問題と正規方程式の関係については, 文献 [21, 22] に記述されており, 残差ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - AM^{-1}\mathbf{z}$  に対して, 重み付き最小二乗問題

$$\min \|\mathbf{r}\|_{M^{-1}}$$

は正規方程式  $A^T M^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{0}$  と等価である. ここで, 行列  $A$  は対称なので, この正規方程式は  $AM^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{0}$  になる. したがって, 定理 3.6 で示した右前処理 MINRES 法と重み付き最小二乗問題

$$\min \|\mathbf{r}\|_{M^{-1}}$$

の関係から, 以下の命題 3.7 が成立する. 本論文では, 命題 3.7 の別証明を与える.

**命題 3.7** 前処理なし MINRES 法では  $\|\mathbf{r}\|_2$  を最小化しているのに対し, 右前処理 MINRES 法では  $\|M^{-\frac{1}{2}}\mathbf{r}\|_2$  を最小化しており, これは  $AM^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{0}$  を解くことと等価になる.

特に, 特異な係数行列をもつ連立一次方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  が consistent な場合, MINRES 法, 右前処理 MINRES 法によって得られる解の残差ベクトルは  $\mathbf{0}$  になる.

**証明** **Algorithm 2** で示した右前処理 MINRES 法のアルゴリズムの概要で記述したように、右前処理 MINRES 法は  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|r\|_{M^{-1}}$  となる  $x$  を求める手法になる。(ここで  $r = b - Ax$  である。) 前処理行列  $M$  は対称正定値行列なので、行列  $M^{-\frac{1}{2}}$  を定義でき、

$$\begin{aligned}\|r\|_{M^{-1}}^2 &= r^T M^{-1} r \\ &= (M^{-\frac{1}{2}} r)^T (M^{-\frac{1}{2}} r) \\ &= \|M^{-\frac{1}{2}} r\|_2^2\end{aligned}$$

より、右前処理 MINRES 法は  $\|M^{-\frac{1}{2}} r\|_2$  を最小化することがわかる。

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|M^{-\frac{1}{2}} r\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|M^{-\frac{1}{2}} b - M^{-\frac{1}{2}} Ax\|_2$  は正規方程式  $(M^{-\frac{1}{2}} A)^T (M^{-\frac{1}{2}} A) x = (M^{-\frac{1}{2}} A)^T M^{-\frac{1}{2}} b$  と等価である。

この正規方程式から右前処理 MINRES 法が収束したとき、 $AM^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} r = AM^{-1} r = 0$  が成り立つ。

したがって、 $M^{-\frac{1}{2}} r \in N(AM^{-\frac{1}{2}}) = R(M^{-\frac{1}{2}} A)^\perp$  である。

一方、連立一次方程式が consistent ならば、 $r = b - Ax \in R(A)$  である。

したがって  $M^{-\frac{1}{2}} r \in R(M^{-\frac{1}{2}} A)$  を満たす。以上の議論から  $M^{-\frac{1}{2}} r \in R(M^{-\frac{1}{2}} A) \cap R(M^{-\frac{1}{2}} A)^\perp$  となるので、 $M^{-\frac{1}{2}} r = 0$  になる。行列  $M$  は正定値行列なので、 $r = 0$  になる。よって、元の連立一次方程式が consistent な時、右前処理 MINRES 法によって得られる解の残差ベクトル  $r$  は  $0$  になる。

次に前処理なしの MINRES 法を適用した場合も、consistent な場合は解の残差ベクトル  $r$  が  $0$  になることを示す。

連立一次方程式が consistent であるので、 $r = b - Ax \in R(A)$  となる。また MINRES 法により、 $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|r\|_2$  なので、 $A$  が対称行列であることを考慮すると、正規方程式  $Ar = 0$  が導かれる。よって  $r \in N(A) = R(A)^\perp$  (行列  $A$  の対称性も利用) となる。したがって、MINRES 法を特異な係数行列をもつ連立一次方程式に適用した時の解の残差ベクトル  $r$  について、 $r \in R(A) \cap R(A)^\perp$  が導かれ、 $r = 0$  となる。□

### 3.3 収束判定方法

特異な係数行列をもつ連立一次方程式が consistent な場合は **Algorithm 3** にて  $\frac{\|r_j\|_2}{\|v^{(1)}\|_2}$  の値が設定した値より小さくなった場合、右前処理 MINRES 法は収束したと判定する。

一方、特異な係数行列をもつ連立一次方程式が inconsistent な場合の右前処理 MINRES 法の収束判定方法について議論する。命題 3.7 にて記述したように、右前処理 MINRES 法は  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|r\|_{M^{-1}}$  となる  $x$  を求める手法であるため、 $\|M^{-\frac{1}{2}} r\|_2$  を最小化する。 $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|M^{-\frac{1}{2}} r\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|M^{-\frac{1}{2}} b - M^{-\frac{1}{2}} Ax\|_2$  は正規方程式  $(M^{-\frac{1}{2}} A)^T (M^{-\frac{1}{2}} A) x = (M^{-\frac{1}{2}} A)^T M^{-\frac{1}{2}} b$  と等価である。この正規方程式から右前処理 MINRES 法が収束したとき、 $AM^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} r = AM^{-1} r = 0$  が成り立つ。以上の議論から、 $\frac{\|AM^{-1} r_j\|_2}{\|AM^{-1} v^{(1)}\|_2}$  の値が設定した値よ



り小さくなった場合、右前処理 MINRES 法は収束したと判定する。なお、初期ベクトルを  $\mathbf{0}$  とした場合、 $\mathbf{v}^{(1)}$  は  $\mathbf{b}$  と同一ベクトルである。

#### 4. E-SSOR 右前処理 MINRES 法

Krylov 部分空間法に対する前処理は、スケーリング前処理や ILU(0) 前処理に代表される直接型前処理と定常反復法等に基づく可変的前処理やマルチグリッド前処理に代表される反復型前処理に大きく分けることができる。Krylov 部分空間法およびその前処理の詳細については [23] を参照されたい。

本章で議論するのは、後者の反復型前処理で、反復法として定常反復法を用いたものであり、これを本論文では内部反復法と呼ぶ ([1, 2, 16, 17, 19])。内部反復法が効果があるためには、内部反復法に相当する前処理行列  $M$  が正則で、今回右前処理を用いるので、 $AM^{-1} \approx I_n$  ( $I_n$  は  $n$  次の単位行列) を満たすことが望ましい。

内部反復を MINRES 法の前処理として用いる場合、その内部反復に用いる定常反復法の収束性は重要である。

SSOR 法は定常反復法の 1 つであり、正定値対称行列を係数行列とする連立一次方程式の場合、実数の加速パラメータ  $\omega$  を  $(0, 2)$  の範囲に取れば、線形方程式の解への収束は保証されている。

対角成分が 0 にならない半正定値行列を係数行列とする連立一次方程式の場合、SSOR 法の収束性に関する性質を [8] が論じている。その一つとして実数の加速パラメータ  $\omega$  を  $(0, 2)$  の範囲にとれば、SSOR 法で得られる各ステップでの残差ベクトルは収束するという事実を証明している。これらの背景を踏まえ、本研究では SSOR 法を特異な係数行列をもつ連立一次方程式への MINRES 法の前処理として採用した。また本研究の過程での数値実験において対称特異な係数行列をもつ連立一次方程式へ SSOR 前処理による MINRES 法を用いたとき、SSOR 法の反復数を 1 回と 2 回以上の場合を比較すると、2 回以上の方が CPU 時間がかかるという結果が得られた。このため、本論文では以後 SSOR 法の反復数を 1 回として MINRES 法の前処理として用いる。

連立一次方程式の係数行列が正定値対称行列の場合、SSOR 法を内部反復数 1 回で用いた場合の前処理行列  $M$  は [23] で記述されているように、実数の加速パラメータを  $\omega$  とした時、以下の式で与えられる。ただし、係数行列  $A = L + D_0 + L^T$  とし、 $L$  は  $A$  の狭義下三角部分、 $D_0$  は  $A$  の対角部分とする。正定値対称行列の場合、対角行列  $D_0$  の全ての成分は正の実数なので  $D_0^{-1}$ 、 $D_0^{-\frac{1}{2}}$  が存在する。

$$(4.1) \quad M = \frac{\omega}{(2-\omega)} \left( L + \frac{D_0}{\omega} \right) D_0^{-1} \left( L^T + \frac{D_0}{\omega} \right)$$

本研究では対称特異な係数行列をもつ連立一次方程式が対象なので、係数行列は半正定値や不定値行列 (固有値が正負混合) である場合がある。係数行列が半正定値の場合、対角成

分は 0 以上である。係数行列が不定値行列の場合、対角成分は正負、0 混合の場合がある。

そこで特異な係数行列をもつ連立一次方程式に対し、SSOR 法を反復数 1 回にして、MINRES 法の前処理として用いる場合、対角行列  $D$  の成分を  $D_0$  の成分が正の値の場合はその値をそのまま定義するが、非正である対角成分に対しては、正の値に置き換え、行列  $D$  を正の対角行列として定義する。その場合前処理行列  $M$  は以下のように定義し、特異な連立一次方程式への SSOR 前処理行列として用いる。

$$(4.2) \quad M = \frac{\omega}{(2-\omega)}(L + \frac{D}{\omega})D^{-1}(L^T + \frac{D}{\omega})$$

行列  $M$  が正定値行列であれば、 $M$  は正則なので定理 3.1 の式 (3.1) の必要十分条件  $R(A) = R(AM^{-1})$  は成立する。また右前処理 MINRES 法の定式化にあたり、行列  $M^{-1}$  に関する内積が行列  $M^{-1}$  が正定値行列であれば定義できる。

対角行列  $D$  の全ての対角成分が正であるため、行列  $(L + \frac{D}{\omega})$  は正則行列であるので、シルベスターの慣性則より、行列  $(L + \frac{D}{\omega})D^{-1}(L^T + \frac{D}{\omega})$  の正、負、零の固有値の数は各々対角行列  $D$  の正、負、零の固有値の数と同じである。ここで、対角行列  $D$  の対角成分は全て正であるため、行列  $(L + \frac{D}{\omega})D^{-1}(L^T + \frac{D}{\omega})$  の固有値は全て正になる。したがって、 $\frac{\omega}{(2-\omega)}$  が正であること、すなわち  $\omega \in (0, 2)$  であることが、式 (4.2) で定義される行列  $M$  が正定値行列であるための必要十分条件である。

ところで、CG 法で SSOR 法の反復 1 回を前処理として用いる場合、Eisenstat's trick を用いると (以下、E-SSOR 前処理と略記する) 行列ベクトル積の計算が削減され、かつ収束性が変わらないので結果として CPU 時間は短縮されることが知られている [9]。

つまり、連立一次方程式 (1.1) を

$$D^{-1}[(D+L)^{-1}A(D+L^T)^{-1}](D+L^T)x = D^{-1}(D+L)^{-1}b$$

のように両側から前処理し、CG 法を適用する。ここで  $\hat{A} = [(D+L)^{-1}A(D+L^T)^{-1}]$  としたとき、CG 法での行列ベクトル積を

$$\hat{A}v = (D+L^T)^{-1}v + (D+L)^{-1}[v - (2D - D_0)(D+L^T)^{-1}v]$$

という形にする。すなわち、行列ベクトル積を前進後退代入、対角行列とベクトル積という演算に置き換えることで計算量を削減する手法が Eisenstat's trick である。

この手法をわれわれの右前処理 MINRES 法にも適用したい。しかしながら、E-SSOR 前処理を用いる際は、両側前処理にしないといけなないので、ここまで議論してきた右前処理 MINRES 法に直接は適用できない。一方で両側前処理 MINRES 法を inconsistent な特異な係数行列をもつ連立一次方程式に適用すると、左前処理が入るため、前章にて述べたように、前処理行列が正則という条件だけでは問題の等価性が保たれるとは限らない。

そこで次節では式 (4.2) を **Algorithm 3** で示した右前処理 MINRES 法に適用したアルゴリズムにおいて、右前処理 MINRES 法が生成するベクトル  $v^{(j)}$  に代わる新規のベクトルを定義する。その新規のベクトルを用いると、式 (4.2) で定義された SSOR 前処理用の行列  $M$  を右前処理に用いた場合、元の連立一次方程式の係数行列  $A$  に行列  $M$  を両側前処理に用いた形で生成した行列と、新規のベクトルとの積の形を導出でき、Eisenstat's

trick によって計算量を削減できるようになる. このアルゴリズムを E-SSOR 右前処理 MINRES 法として提案する.

#### 4.1 E-SSOR 右前処理 MINRES 法の導出

**Algorithm 3** の右前処理 MINRES 法における  $\mathbf{v}^{(j)}$  に対して,  $\tilde{\mathbf{v}}^{(j)} := D^{\frac{1}{2}}(L + \frac{D}{\omega})^{-1}\mathbf{v}^{(j)}$  を定義する. ここで対角行列  $D$  は対角成分がすべて正の値であり, 行列  $L$  は狭義下三角行列なので行列  $(L + \frac{D}{\omega})$  は正則なので,  $(L + \frac{D}{\omega})^{-1}$  が存在し,  $\tilde{\mathbf{v}}^{(j)}$  が定義できる.

**Algorithm 3** の導出にあたり, 行列  $M^{-1}$  の内積に関して行列  $AM^{-1}$  が自己随伴であることを用いた. 具体的には **Algorithm 3** の 7 行目の  $\delta_j$  の計算にあたり,

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad \delta_j &= (AM^{-1}\mathbf{v}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)})_{M^{-1}} \\
 &= \mathbf{v}^{(j)T} M^{-1} A M^{-1} \mathbf{v}^{(j)} \\
 &= ((M^{-1}\mathbf{v}^{(j)})^T, A M^{-1} \mathbf{v}^{(j)}) \\
 &= (\mathbf{u}^{(j)}, A \mathbf{u}^{(j)})
 \end{aligned}$$

としていた. この  $\delta_j$  の計算では, 右前処理 MINRES 法なので, 一度  $\mathbf{u}^{(j)} = M^{-1}\mathbf{v}^{(j)}$  を計算した後,  $A\mathbf{u}^{(j)}$  を計算する形になる. 行列  $M$  を式 (4.2) で定義した場合, 両側前処理の形を導出できず, Eisenstat trick は使えないので, 行列  $M^{-1}$  によって右前処理して作成したベクトルと行列  $A$  との積を計算する形になる.

しかしながら,  $\tilde{\mathbf{v}}^{(j)} := D^{\frac{1}{2}}(L + \frac{D}{\omega})^{-1}\mathbf{v}^{(j)}$  を用いると, 式 (4.3) は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad \delta_j &= (AM^{-1}\mathbf{v}^{(j)}, \mathbf{v}^{(j)})_{M^{-1}} \\
 &= \mathbf{v}^{(j)T} M^{-1} A M^{-1} \mathbf{v}^{(j)} \\
 &= \left(\frac{2-\omega}{\omega}\right)^2 \mathbf{v}^{(j)T} (L^T + \frac{D}{\omega})^{-1} D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} (L + \frac{D}{\omega})^{-1} A (L^T + \frac{D}{\omega})^{-1} D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} (L + \frac{D}{\omega})^{-1} \mathbf{v}^{(j)} \\
 &= \left(\frac{2-\omega}{\omega}\right)^2 (D^{\frac{1}{2}} (L + \frac{D}{\omega})^{-1} \mathbf{v}^{(j)})^T D^{\frac{1}{2}} (L + \frac{D}{\omega})^{-1} A (L^T + \frac{D}{\omega})^{-1} D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} (L + \frac{D}{\omega})^{-1} \mathbf{v}^{(j)} \\
 &= \left(\frac{2-\omega}{\omega}\right)^2 \tilde{\mathbf{v}}^{(j)T} D^{\frac{1}{2}} (L + \frac{D}{\omega})^{-1} A (L^T + \frac{D}{\omega})^{-1} D^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{v}}^{(j)}
 \end{aligned}$$

ここで行列  $\tilde{A} = D^{\frac{1}{2}}(L + \frac{D}{\omega})^{-1} A (L^T + \frac{D}{\omega})^{-1} D^{\frac{1}{2}}$  と定義すると, 式 (4.4) は,

$$\begin{aligned}
 \delta_j &= \left(\frac{2-\omega}{\omega}\right)^2 \tilde{\mathbf{v}}^{(j)T} \tilde{A} \tilde{\mathbf{v}}^{(j)} \\
 &= \left(\frac{2-\omega}{\omega}\right)^2 (\tilde{\mathbf{v}}^{(j)}, \tilde{A} \tilde{\mathbf{v}}^{(j)})
 \end{aligned}$$

となり,  $\tilde{A} \tilde{\mathbf{v}}^{(j)}$  の計算には  $\tilde{A} = D^{\frac{1}{2}}(L + \frac{D}{\omega})^{-1} A (L^T + \frac{D}{\omega})^{-1} D^{\frac{1}{2}}$  であることから, Eisenstat's trick を使うことができる. 即ち

$$(4.5) \quad \tilde{A} \tilde{\mathbf{v}}^{(j)} = D^{\frac{1}{2}} \{ (L^T + \frac{D}{\omega})^{-1} + (L + \frac{D}{\omega})^{-1} \{ I_n - (\frac{2D}{\omega} - D_0) (L^T + \frac{D}{\omega})^{-1} \} \} D^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{v}}^{(j)}$$

とできる．ここで  $I_n$  は  $n$  次の単位行列を意味する．式 (4.5) により， $\tilde{A}\tilde{\mathbf{v}}^{(j)}$  という行列ベクトル積を対角行列とベクトルの積，前進代入，後退代入の形に置き換えて計算量を削減するのが Eisenstat's trick である．式 (4.5) を計算する過程で， $\mathbf{y}^{(j)} = (L^T + \frac{D}{\omega})^{-1} D^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{v}}^{(j)}$  と定義する．Eisenstat's trick に従った，式 (4.5) の計算法を以下に示す．

$$(4.6) \quad \hat{\mathbf{v}}^{(j)} = D^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{v}}^{(j)}$$

$$(4.7) \quad \mathbf{y}^{(j)} = (L^T + \frac{D}{\omega})^{-1} \hat{\mathbf{v}}^{(j)}$$

$$(4.8) \quad \mathbf{s} = (\frac{2D}{\omega} - D_0)\mathbf{y}$$

$$(4.9) \quad \mathbf{t} = \hat{\mathbf{v}}^{(j)} - \mathbf{s}$$

$$(4.10) \quad \mathbf{p} = (L + \frac{D}{\omega})^{-1} \mathbf{t}$$

$$(4.11) \quad \tilde{A}\tilde{\mathbf{v}}^{(j)} = D^{\frac{1}{2}}(\mathbf{y}^{(j)} + \mathbf{p})$$

これらの議論から右前処理 MINRES 法の **Algorithm 3** において，前処理行列  $M$  を内部反復数 1 回の SSOR 前処理行列の式 (4.2) にしたときの E-SSOR 右前処理 MINRES 法のアルゴリズムを **Algorithm 5** に示す．

ただし，7 行目の計算で式 (4.6)，(4.7)，(4.8)，(4.9)，(4.10)，(4.11) を用いる．14 行目の  $\mathbf{y}^{(j)}$  は 7 行目の  $\mathbf{u}^{(j)}$  を計算する過程ですでに計算されているので，あらためて計算する必要はない．

## 4.2 E-SSOR 右前処理 MINRES 法における Eisenstat's trick による演算量の削減効果

4.1 節で導出した E-SSOR 右前処理 MINRES 法は，式 (4.2) を **Algorithm 3** で示した右前処理 MINRES 法に適用したアルゴリズムにおいて，Eisenstat's trick を用いて浮動小数点演算量 (以後演算量と呼ぶ) を削減した．本節では，その演算量の削減効果を論じる．

$n$ ， $Lnnz$  をそれぞれ次元数，行列  $A$  の狭義下三角部分における非零要素数とする．E-SSOR 右前処理 MINRES 法と，式 (4.2) を **Algorithm 3** で示した右前処理 MINRES 法に適用した反復法 (SSOR 右前処理 MINRES 法と呼ぶ) は収束条件を同じにすれば，理論上は同じ反復数で収束する．そこで，この反復数を  $m$  とする．

演算量の比較にあたり，スカラ値間のみの演算量は，ベクトルや行列に関する演算量に比べ，極めて小さいため，除いた．

Table 1 から，E-SSOR 右前処理 MINRES 法の演算量は SSOR 右前処理 MINRES 法の演算量に比べ， $4Lnnz - 2n > 0$  である限り， $2(n + Lnnz) + 2(2Lnnz - n) \times m$  分削減されている．

また収束に要する反復数  $m$  が大きい場合，SSOR 右前処理 MINRES 法の演算量を 1 としたときの，E-SSOR 右前処理 MINRES 法の演算量の比は  $\frac{27n+4Lnnz}{25n+8Lnnz}$  になる．この

**Algorithm 5 : Eisenstat SSOR for right preconditioned MINRES**


---

```

1:  $\tilde{\mathbf{v}}^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{0}$ 
2: Choose initial approximate solution  $\mathbf{x}^{(0)}$ , compute  $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$ 
3:  $\tilde{\mathbf{v}}^{(1)} = D^{\frac{1}{2}}(L + D/\omega)^{-1}\mathbf{v}^{(1)}$ 
4: Set  $\gamma_1 = \sqrt{\frac{2-\omega}{\omega}(\tilde{\mathbf{v}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{v}}^{(1)})}$ , set  $\eta = \gamma_1, s_0 = s_1 = 0, c_0 = c_1 = 1$ 
5: for  $j = 1$  until convergence do
6:    $\tilde{\mathbf{v}}^{(j)} := \tilde{\mathbf{v}}^{(j)}/\gamma_j$ 
7:    $\mathbf{u}^{(j)} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{v}}^{(j)}$ 
8:    $\delta_j = (\frac{2-\omega}{\omega})^2(\tilde{\mathbf{v}}^{(j)}, \mathbf{u}^{(j)})$ 
9:    $\tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)} = (\frac{2-\omega}{\omega})\mathbf{u}^{(j)} - \delta_j\tilde{\mathbf{v}}^{(j)} - \gamma_j\tilde{\mathbf{v}}^{(j-1)}$ 
10:   $\gamma_{j+1} = \sqrt{(\frac{2-\omega}{\omega})(\tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)}, \tilde{\mathbf{v}}^{(j+1)})}$ 
11:   $\alpha_0 = c_j\delta_j - c_{j-1}s_j\gamma_j, \alpha_1 = \sqrt{\alpha_0^2 + \gamma_{j+1}^2}$ 
12:   $\alpha_2 = s_j\delta_j + c_{j-1}c_j\gamma_j, \alpha_3 = s_{j-1}\gamma_j$ 
13:   $c_{j+1} = \alpha_0/\alpha_1, s_{j+1} = \gamma_{j+1}/\alpha_1$ 
14:   $\mathbf{w}^{(j+1)} = ((\frac{2-\omega}{\omega})\mathbf{y}^{(j)} - \alpha_3\mathbf{w}^{(j-1)} - \alpha_2\mathbf{w}^{(j)})/\alpha_1$ 
15:   $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j-1)} + c_{j+1}\eta\mathbf{w}^{(j+1)}$ 
16:   $\eta = -s_{j+1}\eta$ 
17:   $\mathbf{r}_j = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(j)}$ 
18:  check convergence
19: end do

```

---

Table 1. Comparison of MINRES with SSOR and E-SSOR right preconditioning

| Method                                   | Computation cost                      |
|------------------------------------------|---------------------------------------|
| MINRES with SSOR right preconditioning   | $9n + 8Lnnz + (25n + 8Lnnz) \times m$ |
| MINRES with E-SSOR right preconditioning | $7n + 6Lnnz + (27n + 4Lnnz) \times m$ |

Eisenstat's trick による計算時間の削減効果については、次章で報告する。

## 5. 数値実験・結果

本章では、まず 4 章で提案した E-SSOR 右前処理 MINRES 法を特異な係数行列をもつ、inconsistent な連立一次方程式に適用し、4.2 節で述べた Eisenstat's trick による演算量の削減効果を結びつけるため、Eisenstat's trick による計算時間の削減効果を報告する。

さらに E-SSOR 右前処理 MINRES 法を特異な係数行列をもつ、consistent ならびに inconsistent な連立一次方程式に適用し、前処理なし MINRES 法 (以後 MINRES 法と記述)、スケーリング右前処理 MINRES 法と、性能ならびに収束性を比較する。いずれの手



法でも初期ベクトルを  $\mathbf{0}$  とした。報告する CPU 時間は、処理を 10 回行い、その平均値をとった。今回数値実験を行った係数行列はいずれも実対称半正定値行列である。

以下の数値実験では、CPU: Intel(R) Xeon(R) CPU ES-2630 (2.30GHz); OS: Cent OS 6.3 の計算機において、反復法を FORTRAN90 で実装し、全て倍精度演算で行った。またコンパイラは Intel Fortran 13.0.1 を使用した。

右前処理 MINRES 法で用いる前処理用の対角行列  $M$  は、右前処理 MINRES 法の定式化で述べたように、正定値行列である必要がある。4 章の E-SSOR 右前処理 MINRES 法で述べたように、特異行列の対角成分は必ずしも正とは限らない。そこでスケーリング右前処理 MINRES 法の場合に用いるスケーリング行列  $M$ 、E-SSOR 右前処理 MINRES 法の場合に用いる式 (4.2) で用いる対角行列  $D$  をそれぞれ以下のように設定した。対角行列  $D_0$  は元の特異行列  $A$  の対角成分である。

$$(5.1) \quad M_{(i,i)} = \max_j |A_{(i,j)}| : \text{if } \max_j |A_{(i,j)}| > 10^{-8}$$

$$(5.2) \quad M_{(i,i)} = 1 : \text{if } \max_j |A_{(i,j)}| \leq 10^{-8}$$

$$(5.3) \quad D_{(i,i)} = D_{0(i,i)} : \text{if } D_{0(i,i)} > 10^{-8}$$

$$(5.4) \quad D_{(i,i)} = 1 : \text{if } D_{0(i,i)} \leq 10^{-8}$$

行列の下添え字は例えば  $(i, j)$  ならばその行列の  $(i, j)$  成分を意味する。

E-SSOR 右前処理 MINRES 法の場合の対角行列とスケーリング右前処理 MINRES 法の場合のスケーリング行列 (式 (5.1), 式 (5.2)) について、異なる方式を使った。ここで SSOR 法を内部反復数 1 回の場合の前処理行列は対角成分が正の値であれば、式 (4.1) で表現されるので、E-SSOR 右前処理 MINRES 法の対角行列として式 (5.3) を採用した。実際、今回数値実験に利用した、3 つの行列の対角成分は全て  $10^{-8}$  より大きいため、式 (5.3), (5.4) ならびに式 (4.2) で定義した前処理行列  $M$  は式 (4.1) になる。

## 5.1 E-SSOR 右前処理 MINRES 法における Eisenstat's trick による計算時間の削減効果

4.2 節では、E-SSOR 右前処理 MINRES 法と SSOR 右前処理 MINRES 法の演算量を比較し、Eisenstat's trick による演算量の削減効果を論じた。

本節では両手法の計算時間の比較を行い、Eisenstat's trick の計算時間に対する削減効果を報告する。Table 8 に記述している係数行列が bcsstk25, bcsstk36 である inconsistent な系に対する、E-SSOR 右前処理 MINRES 法と SSOR 右前処理 MINRES 法の、収束に要する反復数、CPU 時間をそれぞれ Table 2, Table 3 に示す。なお、inconsistent な系の設定方法は 5.3 節に示している。



CPU 時間は重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}r_j\|_2}{\|AM^{-1}b\|_2}$  の計算を除いた。また収束判定条件は、係数行列が bcsstk25, bcsstk36 それぞれの場合、重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}r_j\|_2}{\|AM^{-1}b\|_2}$  を  $10^{-6}$ ,  $10^{-5}$  以下とした。理由として、リスタートしない場合、重み付き正規方程式の相対残差ノルムはそれぞれの行列の場合、 $10^{-7}$ ,  $10^{-6}$  以下にならず、これら以上の精度のよい解を求めることは困難と判断したためである。

Table 2. Comparison of MINRES with SSOR and E-SSOR right preconditioning (Iter: number of iterations, Tno: computation time not including the computation of the relative residual norm). The values in () are the ratio compared to MINRES with E-SSOR right preconditioning.

Inconsistent problem. Convergence criterion:  $\frac{\|AM^{-1}r_j\|_2}{\|AM^{-1}b\|_2} < 10^{-6}$  (**bcsstk25**)

| Method                                   | Iter         | Tno [sec]    |
|------------------------------------------|--------------|--------------|
| MINRES with SSOR right preconditioning   | 4,054 (1.02) | 10.64 (2.15) |
| MINRES with E-SSOR right preconditioning | 3,959 (1)    | 4.956 (1)    |

Table 3. Comparison of MINRES with SSOR and E-SSOR right preconditioning (Iter: number of iterations, Tno: computation time not including the computation of the relative residual norm). The values in () are the ratio compared to MINRES with E-SSOR right preconditioning.

Inconsistent problem. Convergence criterion:  $\frac{\|AM^{-1}r_j\|_2}{\|AM^{-1}b\|_2} < 10^{-5}$  (**bcsstk36**)

| Method                                   | Iter           | Tno [sec]    |
|------------------------------------------|----------------|--------------|
| MINRES with SSOR right preconditioning   | 13,439 (0.941) | 93.88 (2.44) |
| MINRES with E-SSOR right preconditioning | 14,273 (1)     | 38.48 (1)    |

CPU 時間から行列 bcsstk25 の場合では E-SSOR 右前処理 MINRES 法は右前処理型 SSOR 前処理 MINRES 法に比べ、2.15 倍高速であり、また行列 bcsstk36 の場合では E-SSOR 右前処理 MINRES 法は右前処理型 SSOR 前処理 MINRES 法に比べ、2.44 倍高速であった。4.2 節にて右前処理型 SSOR 前処理 MINRES 法の演算量を 1 とした場合、E-SSOR 右前処理 MINRES 法の演算量の比は、両手法の反復回数を同じとしたとき、 $\frac{27n+4Lnnz}{25n+8Lnnz}$  であると報告した。ここで  $n$  は次元数、 $Lnnz$  は行列の狭義下三角部分の非零要素数である。Table 8 に記載されている対称行列 bcsstk25, bcsstk36 の次元数、狭義下三角成分の非零要素数からそれぞれの行列の場合、 $\frac{27n+4Lnnz}{25n+8Lnnz}$  は 0.668, 0.566 である。それぞれの値の逆数は 1.5, 1.77 になる。そこで演算量の見積もりからでは行列 bcsstk25, bcsstk36 の場合、E-SSOR 右前処理 MINRES 法は右前処理型 SSOR 前処理 MINRES 法に比べ、1.5 倍、1.77 倍高速になると考えられたが、数値実験では演算量の見積もりよ

り CPU 時間の比較では高速になった。要因として非零要素成分に関する間接アドレスを使っていることが考えられる。

## 5.2 数値実験 1

### 5.2.1 Consistent な問題

1.2 節で述べた応用分野で扱われる係数行列が半正定値対称行列で、consistent な連立一次方程式を扱う。本行列データならびに右辺ベクトルデータは北海道大学岩下武史先生からご提供いただいた。テスト問題の次元数は、34,642 である。収束判定条件は、 $\frac{\|r_j\|_2}{\|b\|_2} < 10^{-7}$  と設定する。Table4 に各手法の反復数と CPU 時間を示す。なお、E-SSOR 右前処理 MINRES 法の加速パラメータ  $\omega$  は (0, 2) の間の複数の値を利用した結果、最も反復数が小さかった 1.4 を用いた (Table 5 参照)。

Table 4. Computation results for a consistent problem (Iter: number of iterations, Tres: computation time including the computation of the relative residual norm, Tno: computation time not including the computation of the relative residual norm ) The values in ( ) are the ratio compared to MINRES with E-SSOR right preconditioning.

Convergence criterion:  $\frac{\|r_j\|_2}{\|b\|_2} < 10^{-7}$

| Method                                    | Iter         | Tres [sec]    | Tno [sec]    |
|-------------------------------------------|--------------|---------------|--------------|
| MINRES without preconditioning            | 10,276 (141) | 15.42 (48.64) | 15.42 (67.0) |
| MINRES with scaling right preconditioning | 405 (5.55)   | 1.140 (3.60)  | 0.713 (3.10) |
| MINRES with E-SSOR right preconditioning  | 73 (1)       | 0.317 (1)     | 0.230 (1)    |

特異な係数行列をもつ consistent な連立一次方程式に MINRES 法を適用した場合、2.1 節で述べたように、収束判定のために毎ステップ得られた解から残差ノルム  $\|r_j\|_2$  を計算する必要はなく、 $|r|$  を用いればよい。したがって、MINRES 法の Tno(残差ノルムの計算時間を含まない CPU 時間) に対し、スケーリング右前処理 MINRES 法と E-SSOR 右前処理 MINRES 法は Tres(残差ノルムの計算時間を含めた CPU 時間) を比較する。その結果、E-SSOR 右前処理 MINRES 法は、MINRES 法と比較し 48.6 倍、スケーリング右前処理法 MINRES 法と比較し、3.6 倍高速であった。

Fig. 1 に相対残差  $\frac{\|r_j\|_2}{\|b\|_2}$  vs. 反復数のグラフを示す。○が前処理なし MINRES 法、△がスケーリング右前処理 MINRES 法、★が E-SSOR 右前処理 MINRES 法を表す。

ここで、E-SSOR 右前処理 MINRES 法について加速パラメータ  $\omega$  を (0, 2) の間で 0.2 刻みで変化させた場合の、収束に要する反復数と、残差ノルム  $\|r_j\|_2$  の計算を含めた CPU 時間 Tres を Table5 に示す。さらに横軸に加速パラメータ  $\omega$  の値、縦軸に E-SSOR 右前処理 MINRES 法の反復数、CPU 時間を示した図を Fig. 2, Fig. 3 に示す。

Table5, Fig. 2, Fig. 3 から E-SSOR 右前処理 MINRES 法の反復数、CPU 時間について

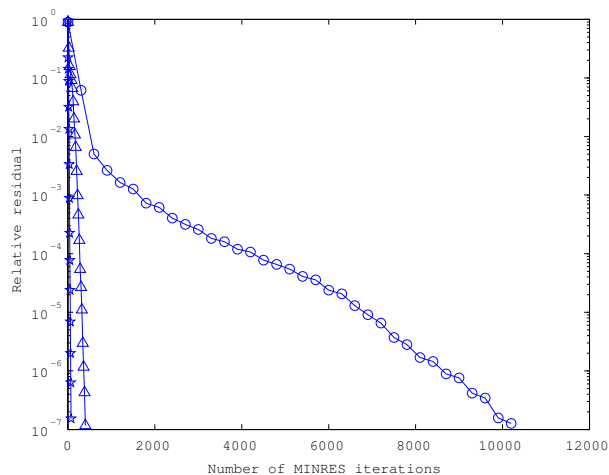


Fig. 1.  $\frac{\|r_j\|_2}{\|b\|_2}$  vs. number of iterations for MINRES without preconditioning( $\circ$ ), MINRES with scaling right preconditioning ( $\Delta$ ), and MINRES with E-SSOR right preconditioning ( $\star$ ) for a consistent problem

Table 5. Dependence of performance of MINRES with E-SSOR right preconditioning on  $\omega$  ( $\omega$ : acceleration parameter, Iter: number of iterations, Tres: computation time including the computation of the relative residual norm) for a consistent problem

Convergence criterion:  $\frac{\|r_j\|_2}{\|b\|_2} < 10^{-7}$

| $\omega$   | 0.2   | 0.4   | 0.6   | 0.8   | 1.0   | 1.2   | 1.4   | 1.6    | 1.8   |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| Iter       | 248   | 171   | 132   | 108   | 92    | 78    | 73*   | 74     | 98    |
| Tres [sec] | 1.062 | 0.750 | 0.568 | 0.468 | 0.391 | 0.339 | 0.317 | 0.315* | 0.453 |

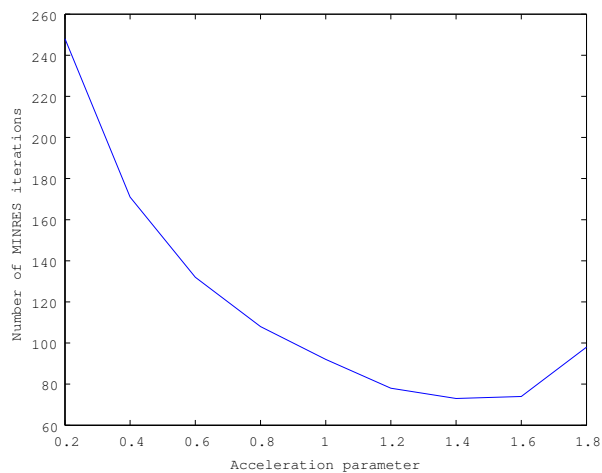


Fig. 2. Number of iterations to achieve relative residual  $< 10^{-7}$  vs.  $\omega$  for MINRES with E-SSOR right preconditioning for a consistent problem

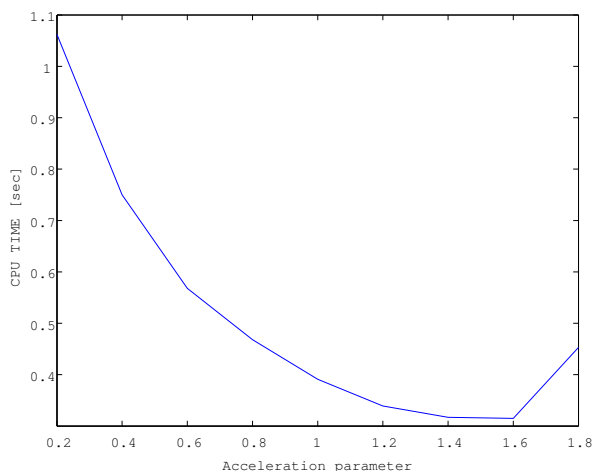


Fig. 3. CPU time to achieve relative residual  $< 10^{-7}$  vs.  $\omega$  for MINRES with E-SSOR right preconditioning for a consistent problem

では  $\omega = 1.4$  と  $\omega = 1.6$  がためした中では同程度に最適であった。

### 5.2.2 Inconsistent な問題

次に、係数行列は前節と同じ行列を扱い、 $\mathbf{b}$  に対して、 $\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|_2 \times \mathbf{u}(0, 1) \times 0.01$  を右辺ベクトルとして設定して、inconsistent な連立一次方程式を扱った。ここで  $\mathbf{u}(0, 1)$  は FORTRAN90 の  $[0, 1)$  の一様擬似乱数関数 random\_number により各成分を生成した  $n$  次元ベクトルである。

収束判定条件は、 $\frac{\|A\mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|A\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}\|_2} < 10^{-6}$  と設定する。ここで  $M$  は前処理なし MINRES 法の場合は単位行列、スケーリング右前処理法 MINRES 法の場合は式 (5.1), (5.2) で定義される対角行列、E-SSOR 右前処理 MINRS 法の場合は式 (4.2) において対角行列  $D$  を式 (5.3), (5.4) により定めた行列として定義される。以後  $\frac{\|A\mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|A\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  を重み付き正規方程式の相対残差ノルムと呼ぶ。

Table 6 に各手法の反復数と CPU 時間を示す。ただし、前処理なし MINRES 法はこの収束条件では収束しなかった。なお、E-SSOR 右前処理 MINRES 法の加速パラメータ  $\omega$  は  $(0, 2)$  の間の 0.2 刻みの複数の値を利用した結果、最も反復数が小さかった 1.4 を用いた。

重み付き正規方程式の相対残差ノルムの計算時間を含めた CPU 時間である Tres を比較すると E-SSOR 右前処理 MINRES 法はスケーリング右前処理 MINRES 法に比べ、2.17 倍高速であった。

Fig. 4 に重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|A\mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|A\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. 反復数のグラフを示す。○が前処理なし MINRES 法、△がスケーリング右前処理 MINRES 法、★が E-SSOR 右前処理 MINRES 法を表す。

Table 6. Computation results for an inconsistent problem (Iter: number of iterations, Tres: computation time including the computation of the relative residual norm, Tno: computation time not including the computation of the relative residual norm) The values in () are the ratio compared to MINRES with E-SSOR right preconditioning.

Convergence criterion:  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2} < 10^{-6}$

| Method                                    | Iter       | Tres [sec]   | Tno [sec]    |
|-------------------------------------------|------------|--------------|--------------|
| MINRES with scaling right preconditioning | 327 (5.84) | 1.307 (2.17) | 0.572 (3.09) |
| MINRES with E-SSOR right preconditioning  | 56 (1)     | 0.601 (1)    | 0.185 (1)    |

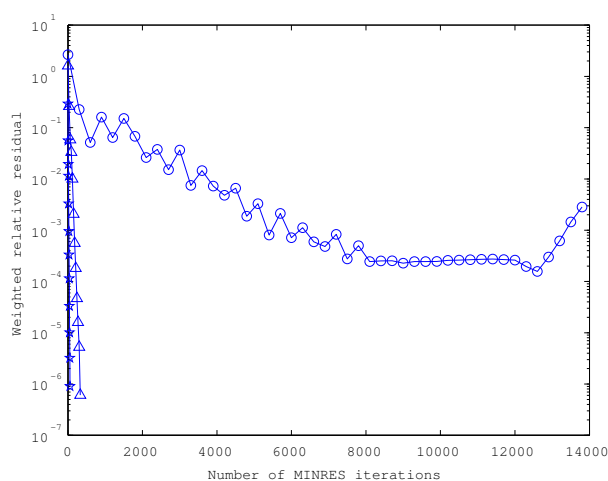


Fig. 4.  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. number of iterations for MINRES without preconditioning ( $\circ$ ), MINRES with scaling right preconditioning ( $\Delta$ ), and MINRES with E-SSOR right preconditioning ( $\star$ ) for an inconsistent problem

さらに E-SSOR 右前処理 MINRES 法について加速パラメータ  $\omega$  を  $(0, 2)$  の間で 0.2 刻みで変化させた場合の、収束に要する反復数と、残差ノルム計算を含めた CPU 時間 Tres を Table 7 に示す。ただし、 $\omega$  が 0.2 の場合はこの収束判定条件では収束せず、重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  は 201 ステップで  $1.75 \times 10^{-6}$  になり、この値以下にはならなかった。また横軸に加速パラメータ  $\omega$  の値、縦軸に E-SSOR 右前処理 MINRES 法の反復数、CPU 時間を示した図を Fig. 5, Fig. 6 に示す。

Table 7, Fig. 5, Fig. 6 から E-SSOR 右前処理 MINRES 法の反復数ならびに CPU 時間ともに  $\omega = 1.4$  がためた中では最適であった。

Table 7. Dependence of performance of MINRES with E-SSOR right preconditioning on  $\omega$  ( $\omega$ : acceleration parameter, Iter: number of iterations, Tres: computation time including the computation of the relative residual norm) for an inconsistent problem

| $\omega$   | 0.4   | 0.6   | 0.8   | 1.0   | 1.2   | 1.4    | 1.6   | 1.8   |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|
| Iter       | 135   | 102   | 82    | 69    | 61    | 56*    | 59    | 76    |
| Tres [sec] | 1.448 | 1.083 | 0.978 | 0.733 | 0.652 | 0.601* | 0.688 | 0.907 |

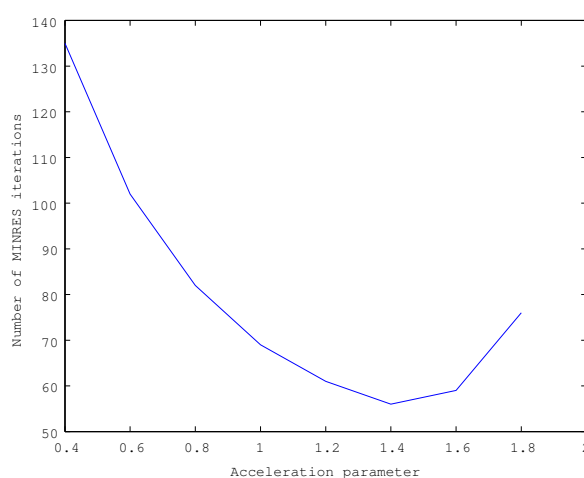


Fig. 5. Number of iterations to achieve relative residual  $< 10^{-6}$  vs.  $\omega$  for MINRES with E-SSOR right preconditioning for an inconsistent problem

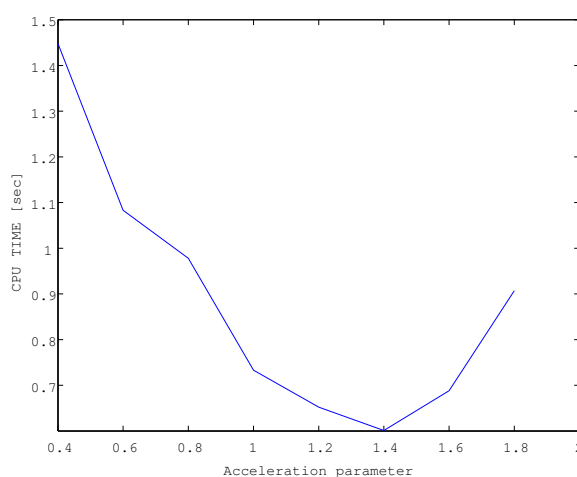


Fig. 6. CPU time to achieve relative residual  $< 10^{-6}$  vs.  $\omega$  for MINRES with right preconditioning for an inconsistent problem



### 5.3 数値実験 2

本節では, The University of Florida Matrix Collection [7] ならびに [11] に掲載されている倍精度演算の範囲では数値的にランク落ちしている (半正定値な) 2 個の行列に対して, consistent, inconsistent な連立一次方程式を扱った. 行列の情報を Table 8 に示す. ここで,  $n$ ,  $nnz$ ,  $Lnnz$  はそれぞれ次元数, 非零要素数, 狭義下三角部分の非零要素数を表す.  $\text{rank}$ ,  $\kappa(A)$  は *MATLAB* の関数 **rank** と **svd** に基づいて計算された行列の階数, 条件数 (最大特異値と非零の最小特異値の比) である.

この 2 つの行列  $A$  に対し, 特異な係数行列をもつ連立一次方程式を consistent,

Table 8. Characteristics of the coefficient matrices of the test problems

| Matrix   | $n$    | $nnz$     | $Lnnz$  | $\text{rank}$ | $\kappa(A)$           | Application area   |
|----------|--------|-----------|---------|---------------|-----------------------|--------------------|
| bcsstk25 | 15,439 | 252,241   | 118,401 | 15,435        | $4.41 \times 10^{12}$ | structural problem |
| bcsstk36 | 23,052 | 1,143,140 | 560,044 | 23,020        | $7.43 \times 10^{11}$ | structural problem |

inconsistent とするために右辺ベクトル  $\mathbf{b}$  を以下のように設定した.

- consistent :  $\mathbf{b} = A \times (1, 1, \dots, 1)^T$
- inconsistent :  $\mathbf{b} = A \times (1, 1, \dots, 1)^T + \|A \times (1, 1, \dots, 1)^T\|_2 \times \mathbf{u}(0, 1) \times 0.01$

ただし,  $\mathbf{u}(0, 1)$  は FORTRAN90 の  $[0, 1)$  の一様擬似乱数関数 random\_number により各成分を生成した  $n$  次元ベクトルである.

#### 5.3.1 Consistent な問題

まず, consistent な問題の場合について, 行列 bcsstk25, bcsstk36 を係数行列とした場合の前処理なし MINRES 法, スケーリング右前処理 MINRES 法, E-SSOR 右前処理 MINRES 法の性能結果をそれぞれ Table 9, Table 10 に示す. 収束判定条件は,  $\frac{\|\mathbf{r}_{jll}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} < 10^{-7}$  と設定する. なお, 両方の行列の場合とも, E-SSOR 右前処理 MINRES 法の加速パラメータは 1.0 とした.

行列 bcsstk25 では E-SSOR 右前処理 MINRES 法は前処理なし MINRES 法に比べ, 7.95 倍, スケーリング右前処理 MINRES 法に比べて 1.16 倍高速であった.

行列 bcsstk36 では E-SSOR 右前処理 MINRES 法は前処理なし MINRES 法に比べ, 2.48 倍, スケーリング右前処理 MINRES 法に比べ, 1.68 倍の高速であった.

行列 bcsstk25, bcsstk36 それぞれを係数行列とした場合について各々 Fig. 7, Fig. 8 に相対残差ノルム  $\frac{\|\mathbf{r}_{jll}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}$  vs. 反復数のグラフを示す.  $\circ$  が前処理なし MINRES 法,  $\Delta$  がスケーリング右前処理 MINRES 法,  $\star$  が E-SSOR 右前処理 MINRES 法を表す.

Table 9. Computation results for a consistent problem for **bcstkt25** (Iter: number of iterations, Tres: computation time including the computation of the relative residual norm, Tno: computation time not including the computation of the relative residual norm) The values in () are the ratio compared to MINRES with E-SSOR right preconditioning  
Convergence criterion:  $\frac{\|r_j\|_2}{\|b\|_2} < 10^{-7}$

| Method                                    | Iter         | Tres [sec]   | Tno [sec]    |
|-------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|
| MINRES without preconditioning            | 2,107 (23.2) | 1.176 (7.95) | 1.176 (10.9) |
| MINRES with scaling right preconditioning | 168 (1.85)   | 0.172 (1.16) | 0.112 (1.04) |
| MINRES with E-SSOR right preconditioning  | 91 (1)       | 0.148 (1)    | 0.108 (1)    |

Table 10. Computation results for a consistent problem for **bcstkt36** (Iter: number of iterations, Tres: computation time including the computation of the relative residual norm, Tno: computation time not including the computation of the relative residual norm) The values in () are the ratio compared to MINRES with E-SSOR right preconditioning.  
Convergence criterion:  $\frac{\|r_j\|_2}{\|b\|_2} < 10^{-7}$

| Method                                    | Iter         | Tres [sec]   | Tno [sec]    |
|-------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|
| MINRES without preconditioning            | 7,533 (6.57) | 11.21 (2.48) | 11.21 (3.65) |
| MINRES with scaling right preconditioning | 2,672 (2.33) | 7.586 (1.68) | 4.321 (1.41) |
| MINRES with E-SSOR right preconditioning  | 1,146 (1)    | 4.513 (1)    | 3.073 (1)    |

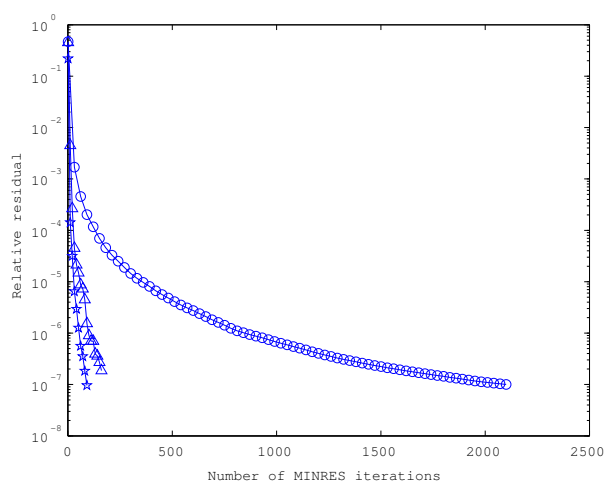


Fig. 7. MINRES without preconditioning ( $\circ$ ), MINRES with scaling right preconditioning ( $\Delta$ ), and MINRES with E-SSOR preconditioning ( $\star$ ) for a consistent problem (**bcstkt25**)

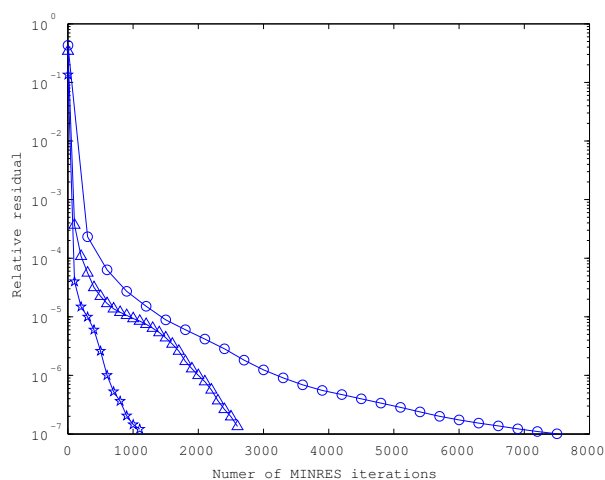


Fig. 8. MINRES without preconditioning ( $\circ$ ), MINRES with scaling right preconditioning ( $\Delta$ ), and MINRES with E-SSOR preconditioning ( $\star$ ) for a consistent problem (**bcsstk36**)

### 5.3.2 Inconsistent な問題

次に、行列 **bcsstk25**, **bcsstk36** を係数行列とする inconsistent な連立一次方程式に対して、前処理なし MINRES 法、スケーリング右前処理 MINRES 法、E-SSOR 右前処理 MINRES 法を適用した場合、重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}r_j\|_2}{\|AM^{-1}b\|_2}$  vs. 反復数のグラフを各々 Fig. 9, Fig. 10 に示す。○が前処理なし MINRES 法、△がスケーリング右前処理 MINRES 法、★が E-SSOR 右前処理 MINRES 法を表す。なお、両方の行列の場合とも、E-SSOR 右前処理 MINRES 法の加速パラメータは 1.0 とした。

また、E-SSOR 右前処理 MINRES を行列 **bcsstk25**, 行列 **bcsstk36** を係数行列とする inconsistent な連立一次方程式に適用した場合、重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}r_j\|_2}{\|AM^{-1}b\|_2}$  をそれぞれ  $10^{-6}$ ,  $10^{-5}$  以下にするための計算結果を Table 11 に示す。

Table 11. Computation results for an inconsistent problem (Iter: number of iterations, Tres: computation time including the computation of the relative residual norm, Tno: computation time not including the computation of the relative residual norm)

Convergence criterion:  $\frac{\|AM^{-1}r_j\|_2}{\|AM^{-1}b\|_2} < 10^{-6}$  (**bcsstk25**),  $\frac{\|AM^{-1}r_j\|_2}{\|AM^{-1}b\|_2} < 10^{-5}$  (**bcsstk36**)

| Matrix          | Iter   | Tres [sec] | Tno [sec] |
|-----------------|--------|------------|-----------|
| <b>bcsstk25</b> | 3,959  | 15.72      | 4.956     |
| <b>bcsstk36</b> | 14,273 | 148.86     | 38.48     |

inconsistent な連立一次方程式に対して E-SSOR 右前処理 MINRES 法はスケーリング右前処理 MINRES 法、前処理なし MINRES 法と比較して収束性が優れており、重み付

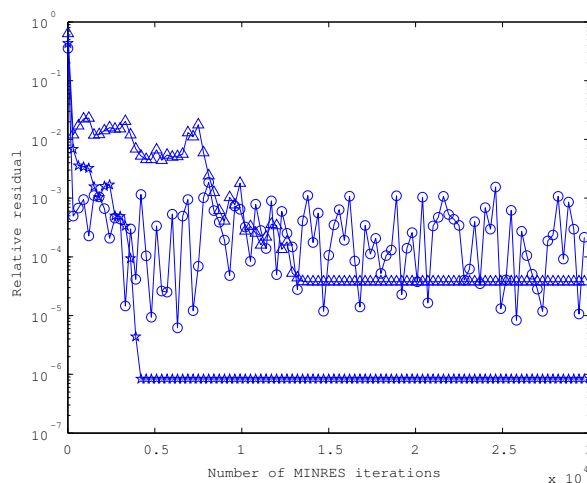


Fig. 9.  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. number of iterations for MINRES without preconditioning ( $\circ$ ), MINRES with scaling right preconditioning ( $\triangle$ ), and MINRES with E-SSOR right preconditioning ( $\star$ ) for an inconsistent problem (**bcsstk25**)

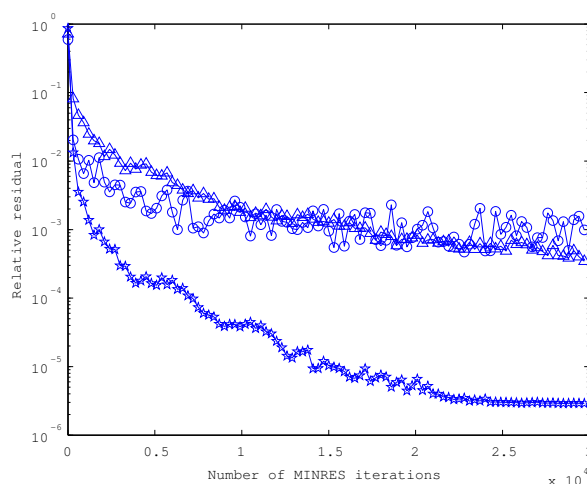


Fig. 10.  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. number of iterations for MINRES without preconditioning ( $\circ$ ), MINRES with scaling right preconditioning ( $\triangle$ ), and MINRES with E-SSOR right preconditioning ( $\star$ ) for an inconsistent problem (**bcsstk36**)

き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  を係数行列が bcsstk25, bcsstk36 それぞれについて  $10^{-6}$ ,  $10^{-5}$  以下まで減少させた。さらに減少しないのは丸め誤差の影響によるものと考えられるが、重み付き正規方程式の相対残差ノルムをより小さくするための手法ならびに、その手法による数値実験結果を次節で述べる。なお、Fig. 9, Fig. 10 において、収束履歴の振動は inconsistent な系の場合、最小化している  $\|\mathbf{r}_j\|_{M^{-1}}$  ではなく、 $\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2$  を評価しているためと MINRES 法が 3 項間漸化式を使っているため、丸め誤差の影響で

直交性が保たれないためと考えられる。以降で示す, inconsistent な系に対する収束履歴の振動は同様の理由である。

## 5.4 リスタートによる MINRES 法の精度の向上

通常 MINRES 法は三項漸化式を用いているので, GMRES 法のようにリスタートによる計算量の節約は必要ないのであるが, 本節では, リスタートにより解の精度を向上させる(残差をより小さくできる)ことを示す。これは, MINRES 法をリスタートすることにより, 丸め誤差によって失われている Krylov 基底の直交性(線形独立性)を回復することにより, 更に残差を減少させるものである。

5.3.2 節にて取り上げた, 半正定値な行列 bcsstk25, bcsstk36 を係数行列とする inconsistent な連立一次方程式に E-SSOR 右前処理 MINRES 法, スケーリング右前処理 MINRES 法(初期ベクトルは  $\mathbf{0}$ ) を適用した場合, Fig. 9, Fig. 10 が示すように, 反復数を増やしても, 途中から重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  をそれ以上小さくできなかった。

そこで, 重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  を, より小さくできなくなった時点で得られた解  $\mathbf{x}_j$  ( $j$  は反復数) を初期ベクトルとして, あらためて E-SSOR 右前処理 MINRES 法, スケーリング右前処理 MINRES 法を 5.3.2 節にて取り上げた inconsistent な連立一次方程式に適用することを考える。

### 5.4.1 係数行列が bcsstk25 である inconsistent な連立一次方程式の場合

ここでは, 係数行列が bcsstk25 である inconsistent な系に対し, 今回の数値実験においてリスタートによる E-SSOR 右前処理 MINRES 法, スケーリング右前処理 MINRES 法の初期解を得るために必要なそれぞれの前処理付き反復法(初期ベクトルは  $\mathbf{0}$ ) の反復数ならびにその反復数での重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  を Table 12 に示す。

Table 12. Iteration number for getting the initial guess for Restarted MINRES with preconditioning and  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  at that iteration number for **bcsstk25**

| Method                                    | Iteration number | $\frac{\ AM^{-1}\mathbf{r}_j\ _2}{\ AM^{-1}\mathbf{b}\ _2}$ |
|-------------------------------------------|------------------|-------------------------------------------------------------|
| MINRES with scaling right preconditioning | 13,000           | $4.631 \times 10^{-5}$                                      |
| MINRES with E-SSOR right preconditioning  | 4,270            | $8.352 \times 10^{-7}$                                      |

次に, bcsstk25 を係数行列とする inconsistent な連立一次方程式に対して, E-SSOR 右前処理 MINRES 法を 4,270 ステップで, スケーリング右前処理 MINRES 法を 13,000 ステップでリスタートした場合の重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. 反復数のグラフを Fig. 11, Fig. 12 に示す。

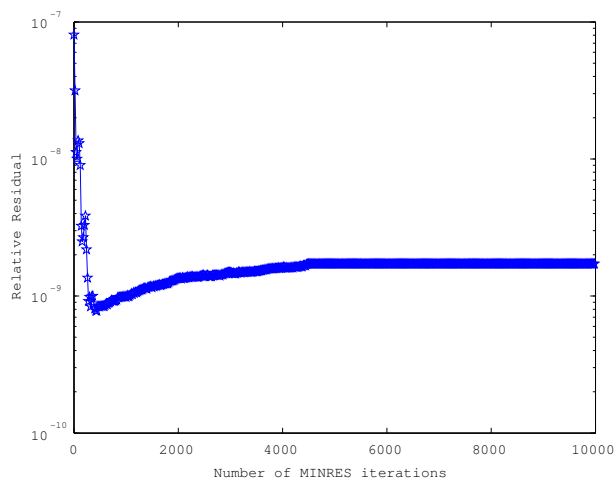


Fig. 11.  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. number of iterations after restart for MINRES with E-SSOR right preconditioning (★) for an inconsistent problem (**bcsstk25**)

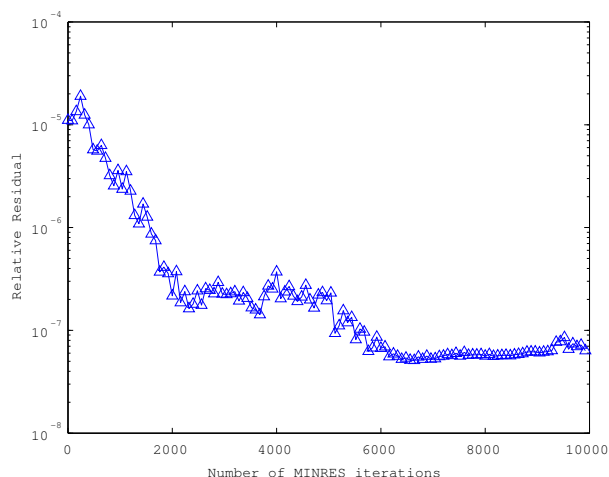


Fig. 12.  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. number of iterations after restart for MINRES with scaling right preconditioning (△) for an inconsistent problem (**bcsstk25**)

Fig. 11, Fig. 12 からリスタートすることにより、重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  を E-SSOR 右前処理 MINRES 法の場合、 $10^{-9}$  以下、スケーリング右前処理 MINRES 法の場合、 $10^{-7}$  以下にすることができ、残差をより小さくすることができた。

#### 5.4.2 係数行列が bcsstk36 である inconsistent な連立一次方程式の場合

ここでは、係数行列が bcsstk36 である inconsistent な系に対し、今回の数値実験においてリスタートによる E-SSOR 右前処理 MINRES 法、スケーリング右前処理 MINRES 法の初期解を得るために必要なそれぞれの前処理付き反復法 (初期ベクトルは  $\mathbf{0}$ ) の反復数な



らびにその反復数での重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  を Table 13 に示す.

Table 13. Iteration number for getting the initial guess for Restarted MINRES with preconditioning and  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  at that iteration number for **bcsstk36**

| Method                                    | Iteration number | $\frac{\ AM^{-1}\mathbf{r}_j\ _2}{\ AM^{-1}\mathbf{b}\ _2}$ |
|-------------------------------------------|------------------|-------------------------------------------------------------|
| MINRES with scaling right preconditioning | 20,000           | $7.361 \times 10^{-4}$                                      |
| MINRES with E-SSOR right preconditioning  | 20,000           | $6.733 \times 10^{-6}$                                      |

次に, bcsstk36 を係数行列とする inconsistent な連立一次方程式に対して, E-SSOR 右前処理 MINRES 法を 20,000 ステップでリスタートし, 20,000 ステップ反復し, さらにリスタートした場合の重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. 反復数のグラフを Fig. 13, Fig. 14 に示す.

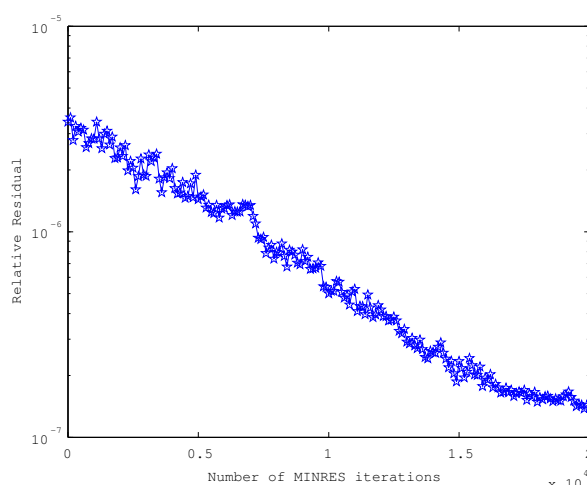


Fig. 13.  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. number of iterations after restart for MINRES with E-SSOR right preconditioning (★) for an inconsistent problem (**bcsstk36**)

Fig. 14 から E-SSOR 右前処理 MINRES 法を 2 回リスタートすることにより, 重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  を  $10^{-8}$  以下にすることができ, 残差をより小さくすることができた.

さらに, 同じ inconsistent な系に対して, スケーリング右前処理 MINRES 法を 20,000 ステップでリスタートした場合の重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. 反復数のグラフを Fig. 15 に示す.

Fig. 15 から, bcsstk36 が係数行列である, inconsistent な系に対して, スケーリング右前処理 MINRES 法を適用した場合, リスタートすることによって, 重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  をさほどより小さくすることはできなかった.

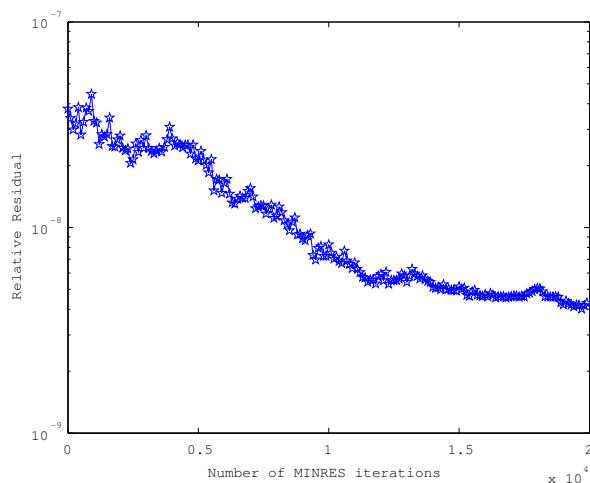


Fig. 14.  $\frac{\|AM^{-1}r_j\|_2}{\|AM^{-1}b\|_2}$  vs. number of iterations after second restart for MINRES with E-SSOR right preconditioning (★) for an inconsistent problem (**bcsstk36**)

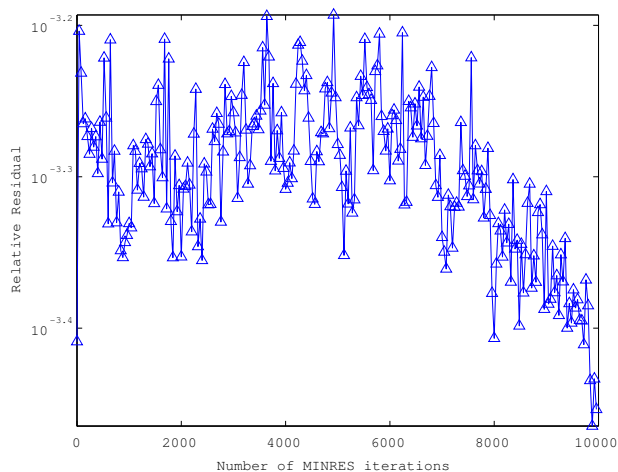


Fig. 15.  $\frac{\|AM^{-1}r_j\|_2}{\|AM^{-1}b\|_2}$  vs. number of iterations after restart for MINRES with scaling right preconditioning ( $\Delta$ ) for an inconsistent problem (**bcsstk36**)

MINRES 法を自動的にリスタートする方式については 5.5 節で論じる。

## 5.5 MINRES 法を自動的にリスタートする方式

本節では、MINRES 法を自動的にリスタートする方式について論じる。5.4 節で MINRES 法をリスタートすることにより、残差を減少させることを提案したが、問題となるのがどの反復数でリスタートするかである。この反復数を自動的に決める方式を検討する。

一つの手法として、小さな正の実数  $\epsilon$  を定めて、重み付き正規方程式の相対残差ノルムの差分  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_k\|_2 - \|AM^{-1}\mathbf{r}_{k+m}\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2} < \epsilon$  を満たしたときの反復数  $k$  の時点での解  $\mathbf{x}_k$  を初期ベクトルとして、あらためて MINRES 法をリスタートする方式を検討する。

これは、重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  が振動するため、リスタートする反復数  $k$  と  $m+k$  反復での重み付き正規方程式の相対残差ノルムの差分をとるのである。今回の数値実験では、 $m$  を 20 とした。すなわち、20 反復ごとに重み付き正規方程式の相対残差ノルムの差分をとる。

係数行列が bcsstk25, bcsstk36 である inconsistent な系に対して、提案手法によってリスタートする反復数  $k$  を決めて、E-SSOR 右前処理 MINRES 法をリスタートした結果を報告する。

行列 bcsstk25 の場合は、 $\epsilon$  の値を  $10^{-8}$  としたところ、リスタートする反復数は 3,855 になった。行列 bcsstk36 の場合は、2 回リスタートを行い、 $\epsilon$  の値を 1 回目が  $10^{-9}$ 、2 回目が  $10^{-11}$  としたところ、リスタートする反復数は 16,154, 18,464 になった。すなわち行列 bcsstk36 の場合は、16,154 反復し、そのときの解を初期ベクトルとしてリスタートして更に 18,464 反復し、そのときの解を初期ベクトルとしてまたリスタートしている。

重み付き正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. 反復数のグラフを行列 bcsstk25 の場合、Fig. 16 に、行列 bcsstk36 の場合、Fig. 17, Fig. 18 に示す。

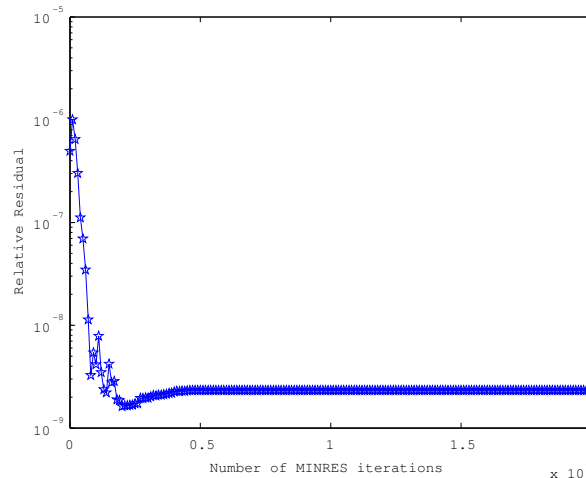


Fig. 16.  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. number of iterations after automatic restart for MINRES with E-SSOR right preconditioning (★) for an inconsistent problem (bcsstk25)

$\epsilon$  や  $m$  の決め方は更なる検討を要するが、提案するような方式で自動的にリスタートできるものとする。

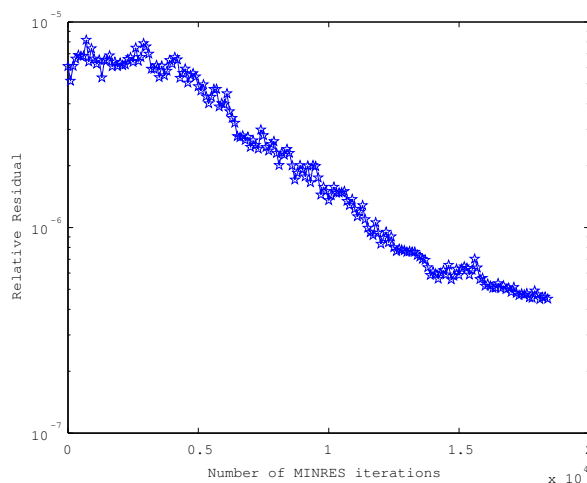


Fig. 17.  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. number of iterations after first automatic restart for MINRES with E-SSOR right preconditioning (★) for an inconsistent problem (**bcsstk36**)

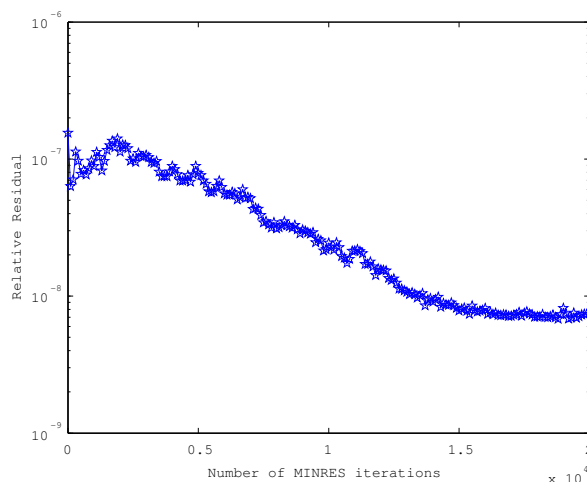


Fig. 18.  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{b}\|_2}$  vs. number of iterations after second automatic restart for MINRES with E-SSOR right preconditioning (★) for an inconsistent problem (**bcsstk36**)

## 5.6 Inconsistent な系に対する E-SSOR 右前処理 MINRES 法の解の精度

本節では、係数行列が半正定値かつ inconsistent な系に対し、E-SSOR 右前処理 MINRES 法を適用した場合、前処理に依存しない残差ノルム  $\frac{\|\mathbf{r}_j\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}$  を報告する。数値実験に用いた inconsistent な系は 5.3 節と同じである。

目的は、係数行列が半正定値かつ inconsistent な系に対して、E-SSOR 右前処理 MINRES 法を含めた、右前処理 MINRES 法の収束判定を命題 3.7, 3.3 節から  $\frac{\|AM^{-1}\mathbf{r}_j\|_2}{\|AM^{-1}\mathbf{v}^{(1)}\|_2}$  に基づき

得られた解に対し、前処理に依存しない残差ノルム  $\frac{\|A\mathbf{r}_j\|_2}{\|A\mathbf{b}\|_2}$  の値を計算し、解の精度を判定することである。

係数行列が `bcsstk25`, `bcsstk36` である inconsistent な系に対して E-SSOR 右前処理 MINRES 法, スケーリング右前処理 MINRES 法, 前処理なし MINRES 法を適用した場合,  $\frac{\|A\mathbf{r}_j\|_2}{\|A\mathbf{b}\|_2}$  vs. 反復数のグラフをそれぞれ Fig. 19, Fig. 20 に示す. なお, 加速パラメータは 1.0 とした.

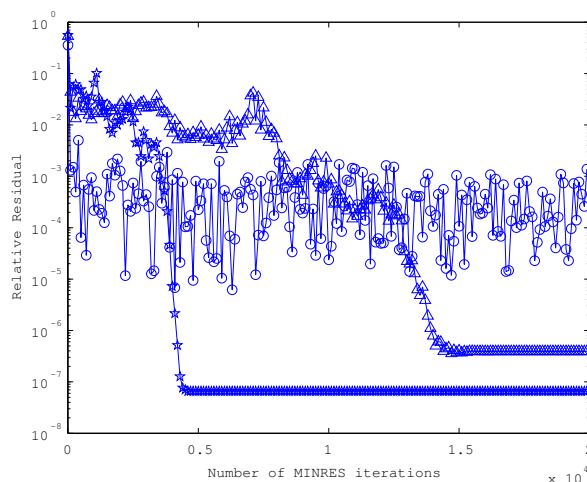


Fig. 19.  $\frac{\|A\mathbf{r}_j\|_2}{\|A\mathbf{b}\|_2}$  vs. number of iterations for MINRES without preconditioning ( $\circ$ ), MINRES with scaling right preconditioning ( $\Delta$ ), and MINRES with E-SSOR right preconditioning ( $\star$ ) for an inconsistent problem (`bcsstk25`)

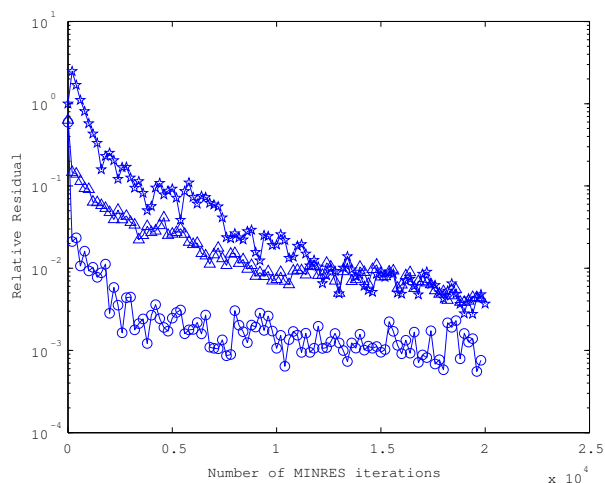


Fig. 20.  $\frac{\|A\mathbf{r}_j\|_2}{\|A\mathbf{b}\|_2}$  vs. number of iterations for MINRES without preconditioning ( $\circ$ ), MINRES with scaling right preconditioning ( $\Delta$ ), and MINRES with E-SSOR right preconditioning ( $\star$ ) for an inconsistent problem (`bcsstk36`)

さらに、各行列の inconsistent な系に対し、5.4 節で提案したリスタート計算を行った。具体的には行列 bcsstk25 の場合は E-SSOR 右前処理 MINRES 法を 4,270 ステップ、スケーリング右前処理 MINRES 法を 13,792 ステップ、前処理なし MINRES 法を 1,725 ステップでリスタートした。一方、行列 bcsstk36 の場合は E-SSOR 右前処理 MINRES 法を 20,000 ステップでリスタートし、20,000 ステップ反復し、さらにリスタートする。これは 5.4 節と同様のリスタート計算である。スケーリング右前処理 MINRES 法を 7,519 ステップでリスタートし、20,000 ステップ反復し、さらにリスタートする。前処理なし MINRES 法は 3,846 ステップでリスタートし、20,000 ステップ反復し、さらにリスタートした。

係数行列が bcsstk25, bcsstk36 である場合に対し、1 回目のリスタートをして 20,000 反復した場合の 3 つの手法の正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|Ar_j\|_2}{\|Ab\|_2}$  vs. 反復数のグラフをそれぞれ Fig. 21, Fig. 22 に示す。

また係数行列が bcsstk36 である場合に対し、2 回目のリスタートをして 20,000 反復した場合の 3 つの手法の正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|Ar_j\|_2}{\|Ab\|_2}$  vs. 反復数のグラフを Fig. 23 に示す。

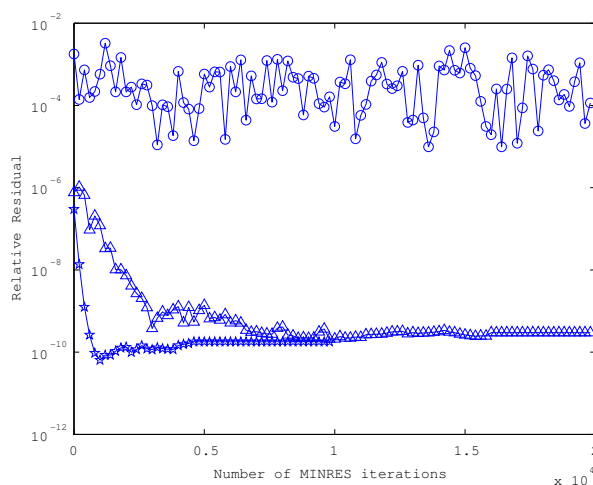


Fig. 21.  $\frac{\|Ar_j\|_2}{\|Ab\|_2}$  vs. number of iterations after restart for MINRES without preconditioning (○), MINRES with scaling right preconditioning (Δ), and MINRES with E-SSOR right preconditioning (★) for an inconsistent problem (bcsstk25)

E-SSOR 右前処理 MINRES 法を行列 bcsstk25 の場合は 1 回リスタート、行列 bcsstk36 の場合は 2 回リスタートすることにより、Fig. 21, Fig. 23 からそれぞれ正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|Ar_j\|_2}{\|Ab\|_2}$  を  $10^{-10}$ ,  $10^{-6}$  以下にすることはできた。

行列 bcsstk25 の場合は正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|Ar_j\|_2}{\|Ab\|_2}$  を E-SSOR 右前処理 MINRES 法をリスタートする手法により、十分小さくできたが、行列 bcsstk36 の場合は倍精度演算であることを考慮すると十分な収束とはいえないが、 $10^{-6}$  以下という精度の解を



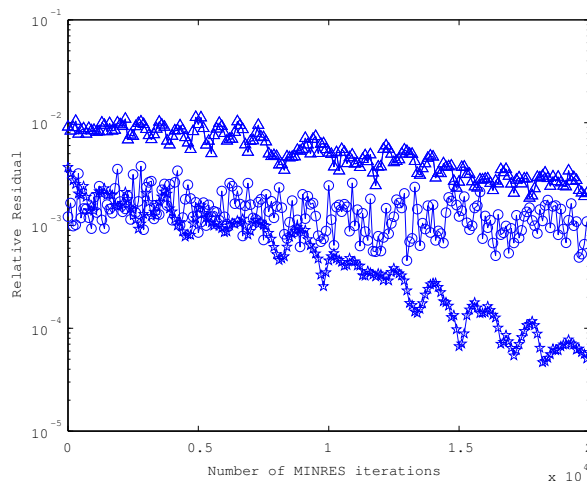


Fig. 22.  $\frac{\|Ar_j\|_2}{\|Ab\|_2}$  vs. number of iterations after restart for MINRES without preconditioning ( $\circ$ ), MINRES with scaling right preconditioning ( $\Delta$ ), and MINRES with E-SSOR right preconditioning ( $\star$ ) for an inconsistent problem (**bcsstk36**)

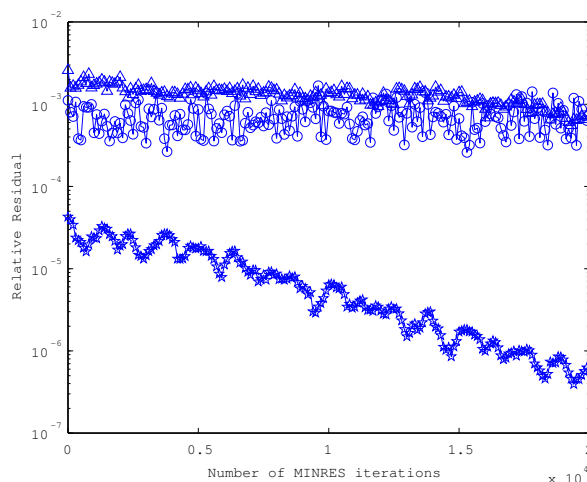


Fig. 23.  $\frac{\|Ar_j\|_2}{\|Ab\|_2}$  vs. number of iterations after restart for MINRES without preconditioning ( $\circ$ ), MINRES with scaling right preconditioning ( $\Delta$ ), and MINRES with E-SSOR right preconditioning ( $\star$ ) for an inconsistent problem (**bcsstk36**)

与えることができた。

前処理付き MINRES 法は、係数行列が正則、特異いずれに関わらず、右前処理、左前処理や両側前処理いずれの場合も必ずしも 2 乗ノルムでの残差ノルムを最小化しているのではないので、正規方程式の相対残差ノルムを十分に小さくできないことは inconsistent な系ではあり得る。

inconsistent な系に対して、前処理なし MINRES 法は行列  $M$  が単位行列なので、正規

方程式  $A\mathbf{r} = \mathbf{0}$  を解いているが, 5.3.2 節にある Fig. 9, Fig. 10 から, 収束が十分ではなかった. さらにリスタート計算を用いても, Fig. 21, Fig. 23 から正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|A\mathbf{r}_j\|_2}{\|A\mathbf{b}\|_2}$  を十分小さくすることができず, リスタート計算を用いても前処理なし MINRES 法は有効ではなかった. そこで, 命題 3.7 より  $\|M^{-\frac{1}{2}}\mathbf{r}\|_2$  を最小化する解 (これは重み付き正規方程式  $AM^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{0}$  の解と同じ) を解の候補の一つであると考えた. そして前処理として, 今回提案した E-SSOR 右前処理 MINRES 法をリスタートさせることにより, 正規方程式の相対残差ノルム  $\frac{\|A\mathbf{r}_j\|_2}{\|A\mathbf{b}\|_2}$  を小さくすることができた.

最後に, 悪条件の問題に対し, MINRES 法の性能を向上させる方法として, 近年, MINRES-QLP 法 ([4–6]) が提案されている. MINRES-QLP 法は, 特に, MINRES 法において Lanczos 法から得られる三重対角行列の QR 分解に相当する部分について工夫をし, 対称特異系に対して最小二乗解のうち, 解自体の 2 乗ノルムが最小となる解を与える手法である. 悪条件の問題に対しては, MINRES-QLP 法は MINRES 法より精度のよい解を与えることが報告されている. 本論文では MINRES 法そのものを前処理とリスタートを用いて性能を向上させる方法について論じた. 提案法と MINRES-QLP 法の比較や, 提案法の MINRES-QLP 法への適用については, 今後の研究課題としたい.

## 6. まとめ

対称半正定値な係数行列をもつ連立一次方程式に対して, inconsistent な場合にも最小二乗解を与える MINRES 法を採用し, inconsistent な場合を考慮すると, 右前処理の方が左前処理より問題の等価性を実現しやすいことを示し, 右前処理 MINRES 法の定式化を行った. また正則な系だけでなく, 特異で consistent な系に対しても右前処理 MINRES 法が重み付き最小二乗問題の解に破綻することなく収束することを証明した. さらに, 前処理として, CG 法の両側前処理の計算量を削減するのに用いられる Eisenstat's trick を SSOR 右前処理に適用した MINRES 法 (E-SSOR 右前処理 MINRES 法) を提案した. 数値実験では 3 つの半正定値行列を係数行列とする consistent な連立一次方程式に E-SSOR 右前処理を適用したところ, スケーリング右前処理 MINRES 法より速く収束した. また, 同様の行列を係数行列とする inconsistent な連立一次方程式に対しても一つの行列については E-SSOR 右前処理 MINRES 法はスケーリング右前処理 MINRES 法より速く収束し, 2 つの行列については重み付き正規方程式の相対残差ノルムをより小さくすることができた. さらに E-SSOR 右前処理 MINRES 法をリスタートすることにより, inconsistent な系に対して重み付き正規方程式の相対残差ノルムをさらに小さくすることができることを示した.

**謝辞** 本研究の数値実験において, 行列データならびに右辺ベクトルデータをご提供いただいた岩下武史先生に感謝いたします. また本研究に関して有益な示唆をいただいた, 杉原正顯先生, 保國恵一博士に感謝いたします. さらに本論文の査読者の方々には有益なコ

メントをいただき、本論文を改善することができましたので、感謝いたします。本研究は科学研究費補助金 No.15K04768 の交付を受けて行った研究の成果である。

### 参考文献

- [1] Abe, K., and Zhang, S.-Z., A variable preconditioning using the SOR method for GCR-like methods, *Int. J. Numer. Anal. Model.*, **2**(2005), 147-161.
- [2] Aoto, D., Ishiwata, E., and Abe, K., A variable preconditioned GCR( $m$ ) method using the GSOR method for singular and rectangular linear systems, *J. Comput. Appl. Math.*, **234**(2010), 703–712.
- [3] Björck, A., *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [4] Choi, S.C., Paige, C. C., and Saunders, M. A., MINRES-QLP: A Krylov subspace method for indefinite or singular symmetric systems, *PhD thesis*, ICME, Stanford University, 2006.
- [5] Choi, S.C., Paige, C. C., and Saunders, M. A., MINRES-QLP: A Krylov subspace method for indefinite or singular symmetric systems, *SIAM J. Sci. Comput.*, **33**(2011) 1810–1836.
- [6] Choi, S.C., and Saunders, M. A., ALGORITHM 937: MINRES-QLP for Singular Symmetric and Hermitian Linear Equations and Least-Squares Problems, *ACM Trans. Math. Softw.*, **40**(2014) 12pp.
- [7] Davis, T.A., *The University of Florida Sparse Matrix Collection*, <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/>.
- [8] Dax, A., The convergence of linear stationary iterative processes for solving singular unstructured systems of linear equations, *SIAM Review.*, **32**(1990), 611–635.
- [9] Eisenstat, S. C., Efficient implementation of a class of preconditioned conjugate gradient methods, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **2**(1981), 1–4.
- [10] Elman, H., Silvester, D., and Wathen A., *Finite Elements and Fast Iterative Solvers with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, 2005.
- [11] Foster, L., *San Jose State University Singular Matrix Database*, <http://www.math.sjsu.edu/singular/matrices/>.
- [12] Greenbaum, A., *Iterative Methods for Solving Linear Systems.*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [13] Hayami, K., Yin, J.-F., and Ito, T., GMRES methods for least squares problems, *SIAM*

- J. Matrix Anal. Appl.*, **31**(2010), 2400–2430.
- [14] Hayami, K., and Sugihara, M., A geometric view of Krylov subspace methods on singular systems, *Numerical Linear Algebra with Applications.*, **18**(2011), 449–469.
- [15] Igarashi, H., and Honma, T., On convergence of ICCG applied to finite element equation for quasi-static fields, *IEEE Trans. Magn.*, **38**(2002), 565–568.
- [16] Imakura, A., Sakurai, T., Sumiyoshi, K., and Matsufuru., H., An auto-tuning technique of the weighted Jacobi-type Iteration used for preconditioners of Krylov subspace methods, *IEEE 6th International Symposium on Embedded Multicore SoCs (MCSoS-12)*, (2012), 183–190
- [17] Imakura, A., Sakurai, T., Sumiyoshi, K., and Matsufuru., H., A parameter optimization technique for a weighted Jacobi-type preconditioner, *JSIAM Letters*, **4**(2012), 41–44.
- [18] Kaasschieter, E. F., Preconditioned conjugate gradients for solving singular systems, *J. Comput. Appl. Math.*, **24**(1988), 265–275.
- [19] Morikuni, K., and Hayami, K., Inner-iteration Krylov subspace methods for least squares problems, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **34**(2013), 1–22
- [20] Paige, C. C., and Saunders, M. A., Solution of sparse indefinite systems of linear equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **12**(1975), 617–629.
- [21] Rao, C. R., *Linear Statistical Inference and its Applications. Second edition*, John Wiley Sons, Inc., 1973.
- [22] Rao, C. R. 著, 奥田忠一 他訳, 統計的推測とその応用, 東京図書, 1977.
- [23] Saad, Y., *Iterative methods for sparse linear systems. 2nd edition*, SIAM, Philadelphia, PA, 2003.
- [24] Saad, Y., and Schultz, M. H., GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**(1986), 856–869.
- [25] 杉原光太, 速水 謙, 実対称半正定値線形方程式への MINRES 法と GMRES 法の適用について, 日本応用数理学会, 環瀬戸内応用数理研究部会, 第 18 回シンポジウム, 加計学園国際学術センター, 倉敷, 2014 年 12 月 5 日–6 日.
- [26] Sugihara, K., and Hayami, K., Right preconditioned MINRES for singular linear systems, International Workshop on Information Technology, Applied Mathematics and Science (IMS2015), 「情報技術, 応用数学そして科学に関する国際ワークショップ (IMS2015)」, 京都市生涯学習総合センター, 2015 年 3 月 26 日–28 日.
- [27] 杉原正顕, 室田一雄, 線形計算の数理, 岩波書店, 東京, 2009.

- [28] van der Vorst, H. A., *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*, Cambridge University Press, New York, NY, 2003.

杉原 光太 (学生会員) 〒101-8430 東京都千代田区一ツ橋 2-1-2

1993 年京都大学理学研究科数理解析修士課程修了。現在，総合研究大学院大学博士課程在学中。日本応用数理学会会員。連立一次方程式の数値解法に興味を持つ。

速水 謙 (正会員) 〒101-8430 東京都千代田区一ツ橋 2-1-2

1981 年東京大学大学院工学系研究科修士課程修了。Ph.D, 博士 (工学)。現在，国立情報学研究所，総合研究大学院大学 教授。日本応用数理学会，SIAM 等会員。数値解析，特に数値線形代数，逆問題などに興味を持っている。

Ning Zheng (学生会員) 〒101-8430 東京都千代田区一ツ橋 2-1-2

2015 年 3 月 Doctor degree in Applied Mathematics of Tongji University。現在，総合研究大学院大学博士課程在学中。日本応用数理学会会員。数値解析，金融工学に興味を持つ。